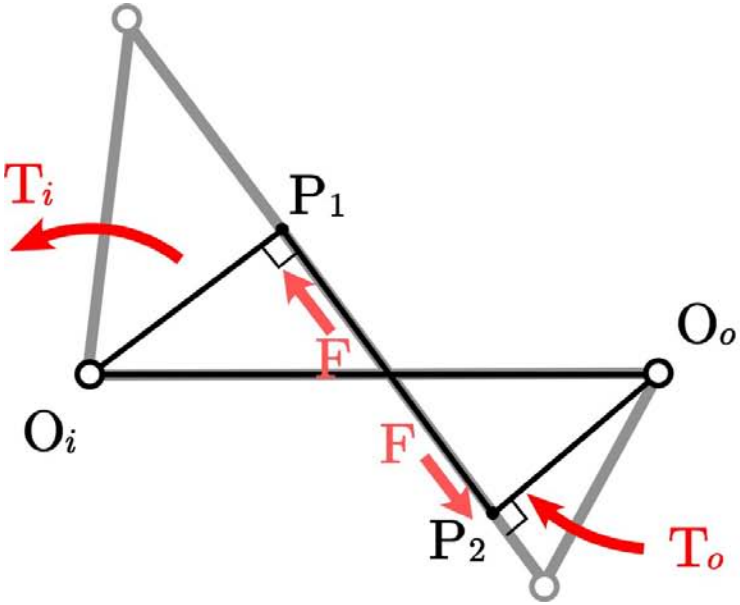
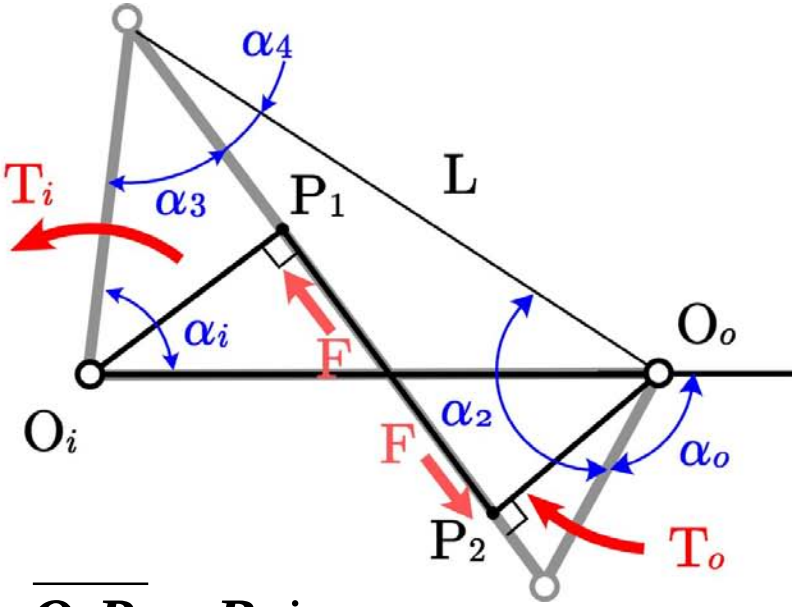
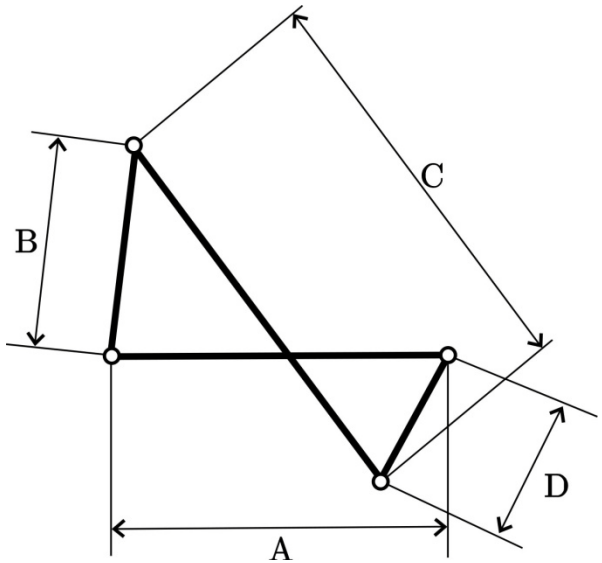
# 機構学
# Part 5：瞬間中心

金子真

# 等価ベルトモデル




$$\overline{O_i P_1} = B \sin \alpha_3$$

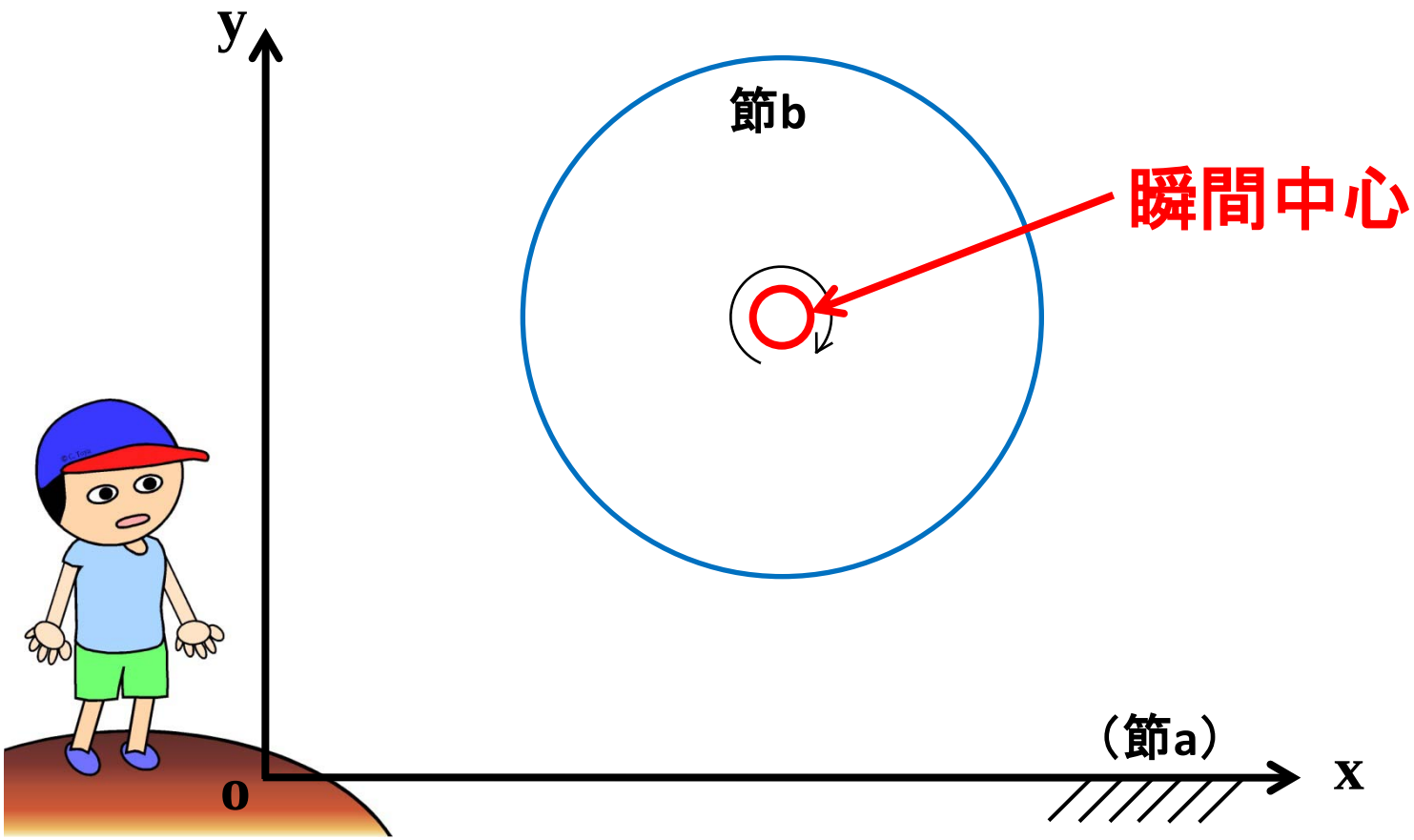
$$\overline{O_o P_2} = D \sin(\alpha_2 + \alpha_4)$$

$$T_i = F \overline{O_i P_1}$$

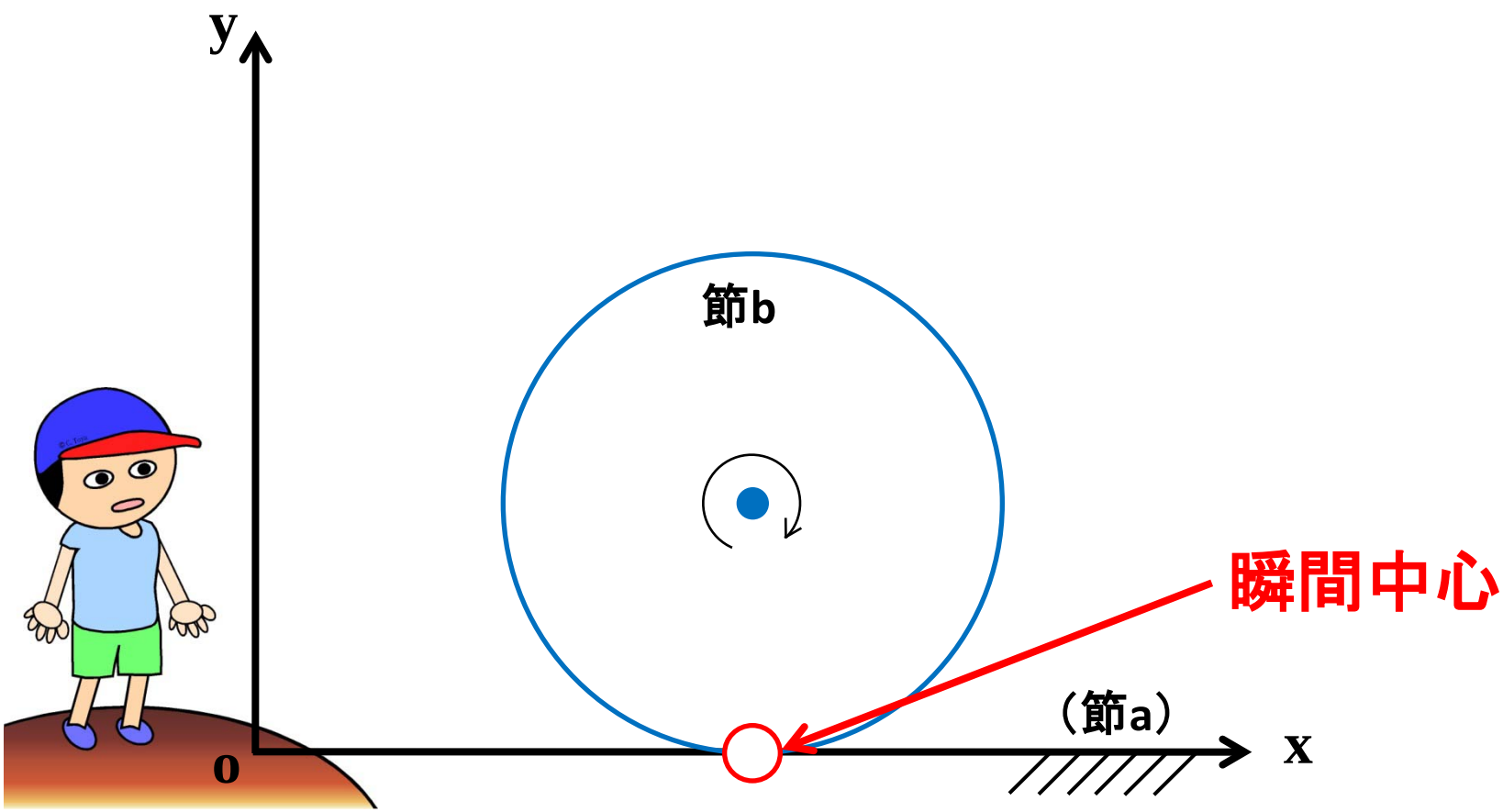
$$T_o = F \overline{O_o P_2}$$

$$\therefore T_o = T_i \frac{D \sin(\alpha_2 + \alpha_4)}{B \sin \alpha_3}$$

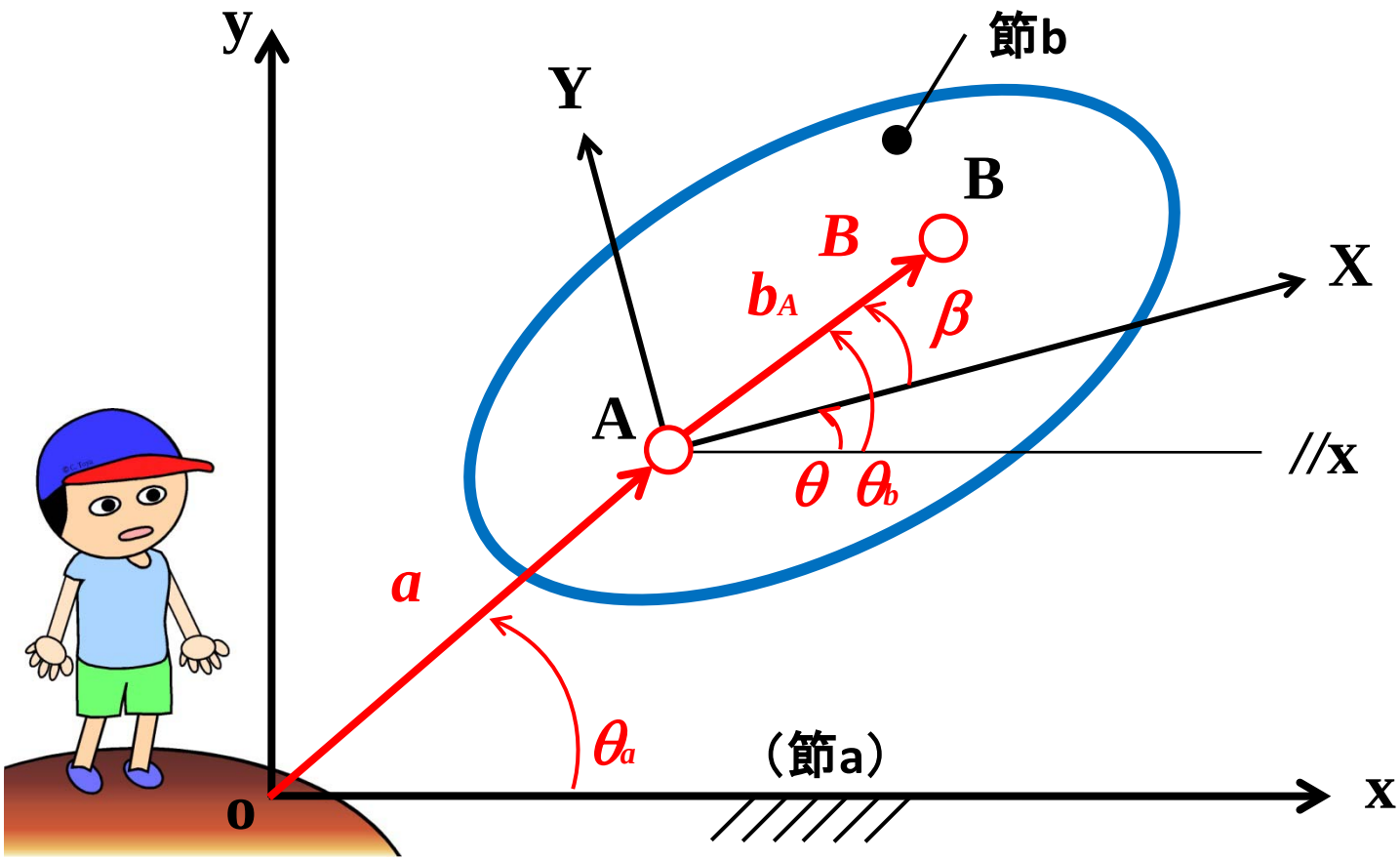
# 瞬間中心とは？



# 瞬間中心とは？



# 静止座標系と動座標系



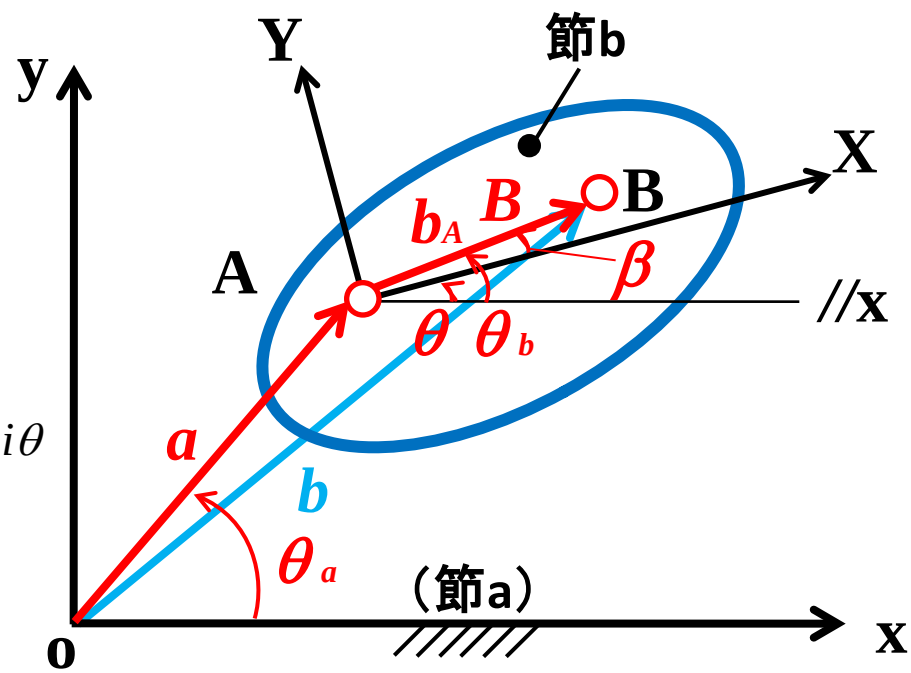

$b_A$ ：静止座標系　o-xy

$B$ ：動座標系　A-XY

$\theta$ ：静止座標系（節a）と動座標系（節b）の軸が成す角度

# 複素数による記述

$$\boldsymbol{a} = x_A + iy_A$$
$$= a(\cos\theta_a + i\sin\theta_a)$$
$$= ae^{i\theta_a} \quad (a = |\boldsymbol{a}|)$$
$$\boldsymbol{b} = X_B + iY_B = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}_A$$
$$\boldsymbol{b}_A = be^{i\theta_b} = be^{i(\theta+\beta)} = (be^{i\beta})e^{i\theta}$$
$$= \boldsymbol{B}e^{i\theta}$$
$$(b = |\boldsymbol{b}_A| = |\boldsymbol{B}|,\ \boldsymbol{B} = be^{i\beta})$$

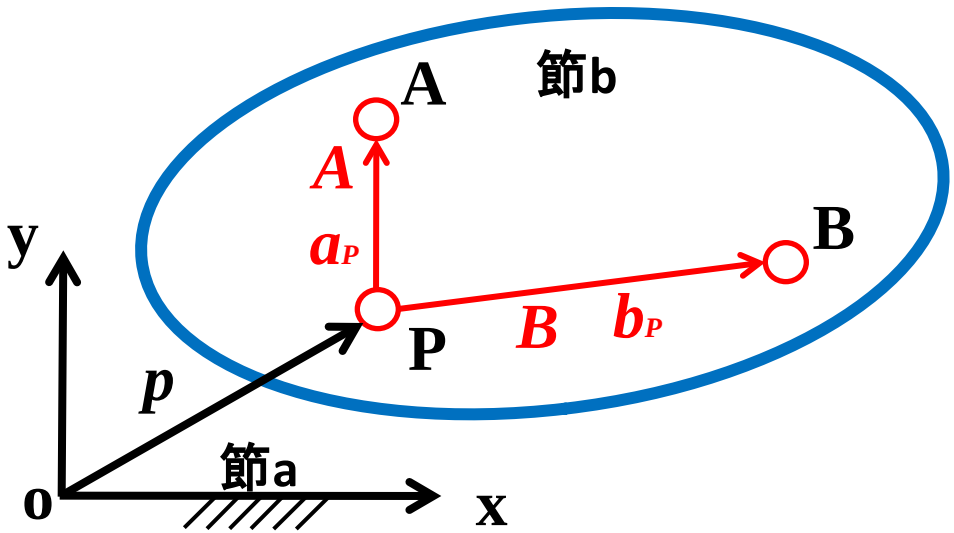



$\boldsymbol{b}_A$ ：静止座標系 o-xy
$\boldsymbol{B}$ ：動座標系 A-XY
$\theta$ ：静止座標系（節a）と動座標系（節b）の軸が成す角度

# 瞬間中心

瞬間中心：ある瞬間に2つの節の間の相対速度が0となる点

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{a}_P \quad \left(\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{A}e^{i\theta}\right) \\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}_P \quad \left(\boldsymbol{b}_P = \boldsymbol{B}e^{i\theta}\right) \end{cases}$$



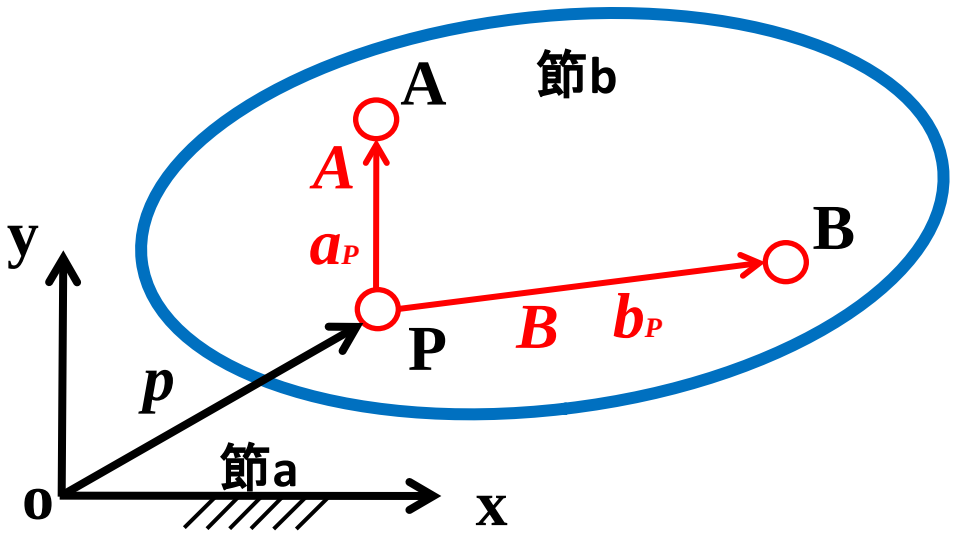

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{a}} = \dot{\boldsymbol{p}} + \dot{\boldsymbol{a}}_P \\ = \dot{\boldsymbol{p}} + \left(\cancelto{0}{\dot{\boldsymbol{A}}}e^{i\theta} + \boldsymbol{A}e^{i\theta} i\dot{\theta}\right) \\ = \dot{\boldsymbol{p}} + i\left(\boldsymbol{A}e^{i\theta}\right)\dot{\theta} = \dot{\boldsymbol{p}} + i\boldsymbol{a}_P\dot{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{b}} = \dot{\boldsymbol{p}} + i\boldsymbol{b}_P\dot{\theta} \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{a}_P, \boldsymbol{b}_P$ | ：静止座標系 |
| $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ | ：動座標系 |
| $\theta$ | ：静止座標系（節a）と動座標系（節b）の軸が成す角度 |

# 瞬間中心

瞬間中心：ある瞬間に2つの節の間の相対速度が0となる点

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{a}} = \dot{\boldsymbol{p}} + i\boldsymbol{a}_P\dot{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{b}} = \dot{\boldsymbol{p}} + i\boldsymbol{b}_P\dot{\theta} \end{cases}$$




点Pが節bの瞬間中心のとき

$$\dot{\boldsymbol{p}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{a}} = i\boldsymbol{a}_P\dot{\theta} & \cdots ① \\ \dot{\boldsymbol{b}} = i\boldsymbol{b}_P\dot{\theta} & \cdots ② \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{a}_P, \boldsymbol{b}_P$ | ：静止座標系 |
| $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ | ：動座標系 |
| $\theta$ | ：静止座標系（節a）と動座標系（節b）の軸が成す角度 |

# 瞬間中心

瞬間中心：ある瞬間に2つの節の間の相対速度が0となる点

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{a}} = i\boldsymbol{a}_P\dot{\theta} & \cdots ① \\ \dot{\boldsymbol{b}} = i\boldsymbol{b}_P\dot{\theta} & \cdots ② \end{cases}$$

①より

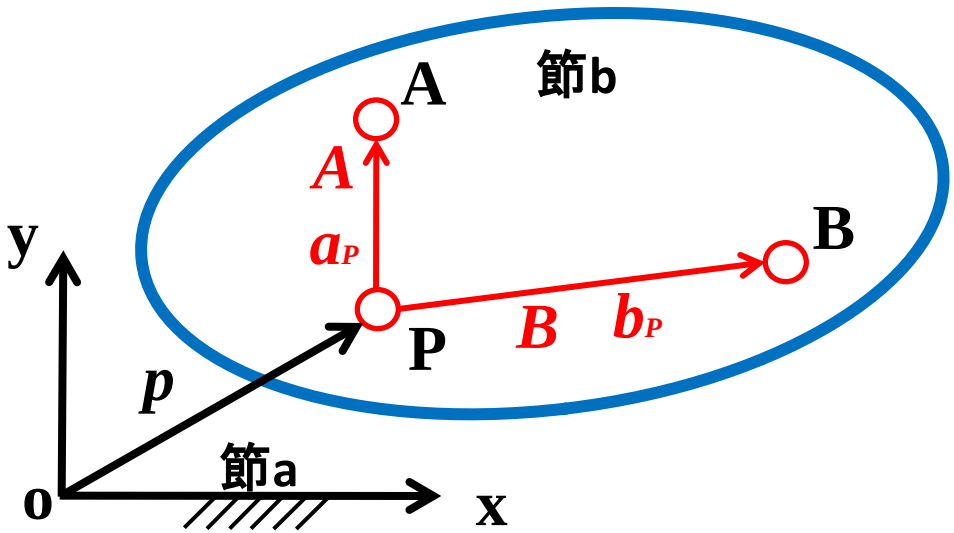
$$\dot{\boldsymbol{a}} = i(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{p})\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} - \frac{\dot{\boldsymbol{a}}}{i\dot{\theta}} = \boldsymbol{a} + i\frac{\dot{\boldsymbol{a}}}{\dot{\theta}}$$

②より

$$\dot{\boldsymbol{b}} = i(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p})\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} - \frac{\dot{\boldsymbol{b}}}{i\dot{\theta}} = \boldsymbol{b} + i\frac{\dot{\boldsymbol{b}}}{\dot{\theta}}$$




| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{a}_P, \boldsymbol{b}_P$ | ：静止座標系 |
| $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ | ：動座標系 |
| $\theta$ | ：静止座標系（節a）と動座標系（節b）の軸が成す角度 |

# 瞬間中心

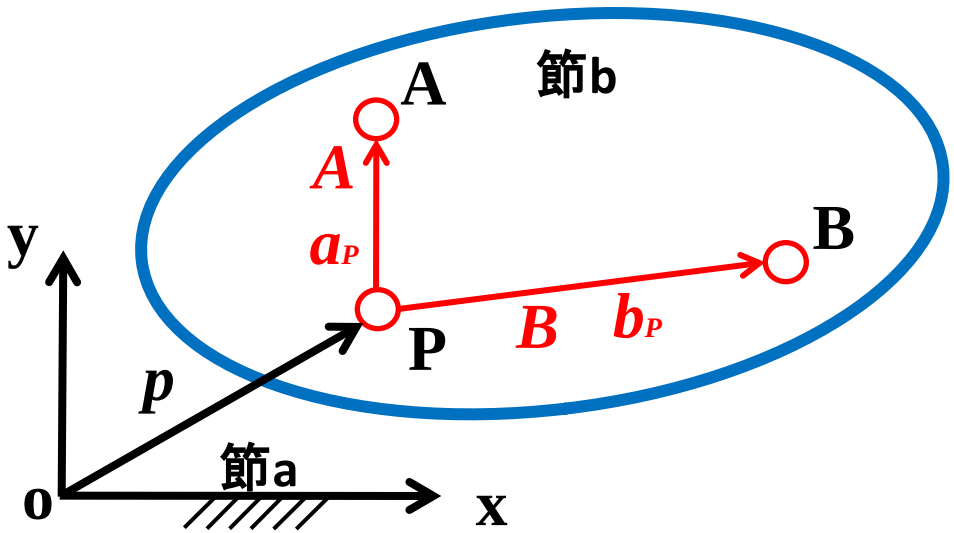
瞬間中心：ある瞬間に2つの節の間の相対速度が0となる点

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{a}} = i\boldsymbol{a}_P\dot{\theta} & \cdots ① \\ \dot{\boldsymbol{b}} = i\boldsymbol{b}_P\dot{\theta} & \cdots ② \end{cases}$$

①÷②より

$$\frac{\dot{\boldsymbol{a}}}{\dot{\boldsymbol{b}}} = \frac{\boldsymbol{a}_P}{\boldsymbol{b}_P} = \frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}}$$

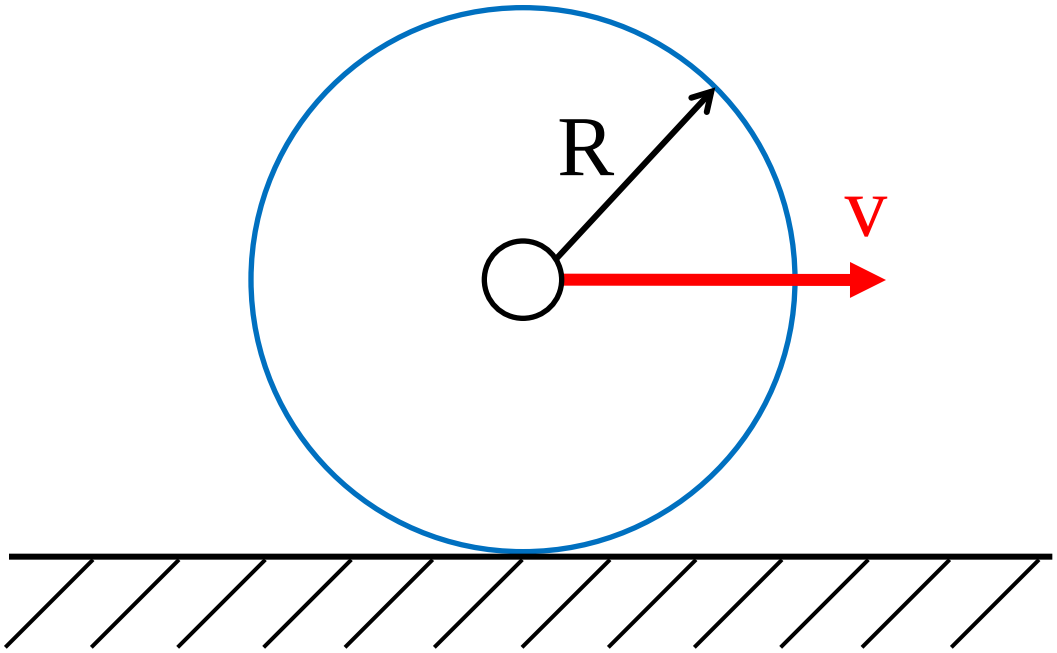
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\dot{\boldsymbol{a}}}{\dot{\boldsymbol{b}} - \dot{\boldsymbol{a}}}$$




| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{a}_P, \boldsymbol{b}_P$ | ：静止座標系 |
| $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ | ：動座標系 |
| $\theta$ | ：静止座標系（節a）と動座標系（節b）の軸が成す角度 |

# 例題

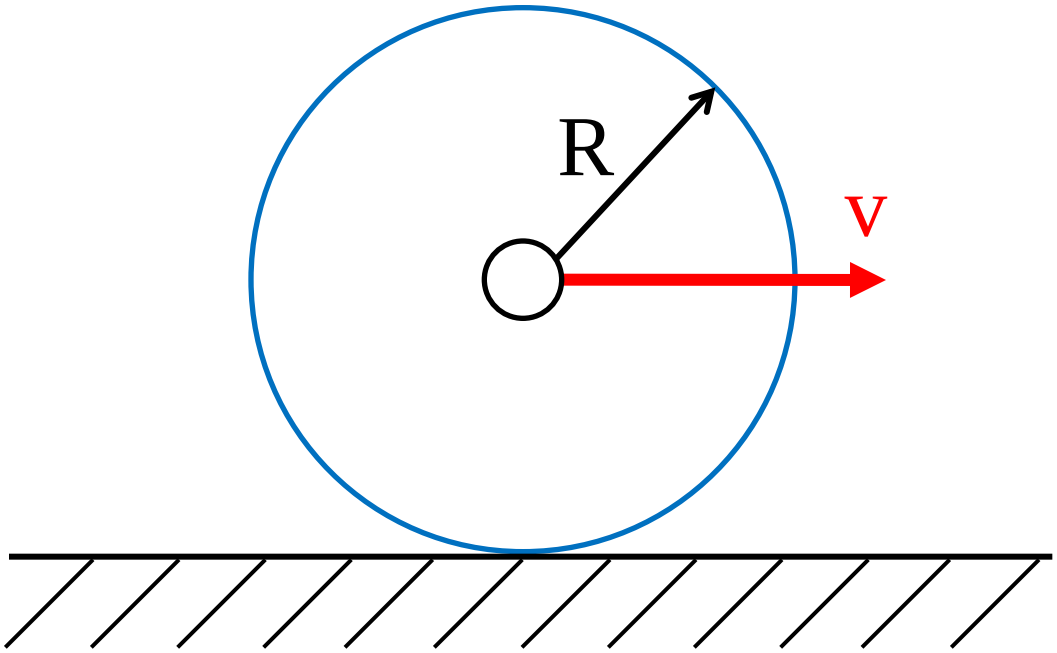
（1）円柱と静止節（水平面）の間の瞬間中心はどこか.
（2）円柱の中心の速度が v のとき，円柱上での最大速度はいくらか．またその点はどこか.



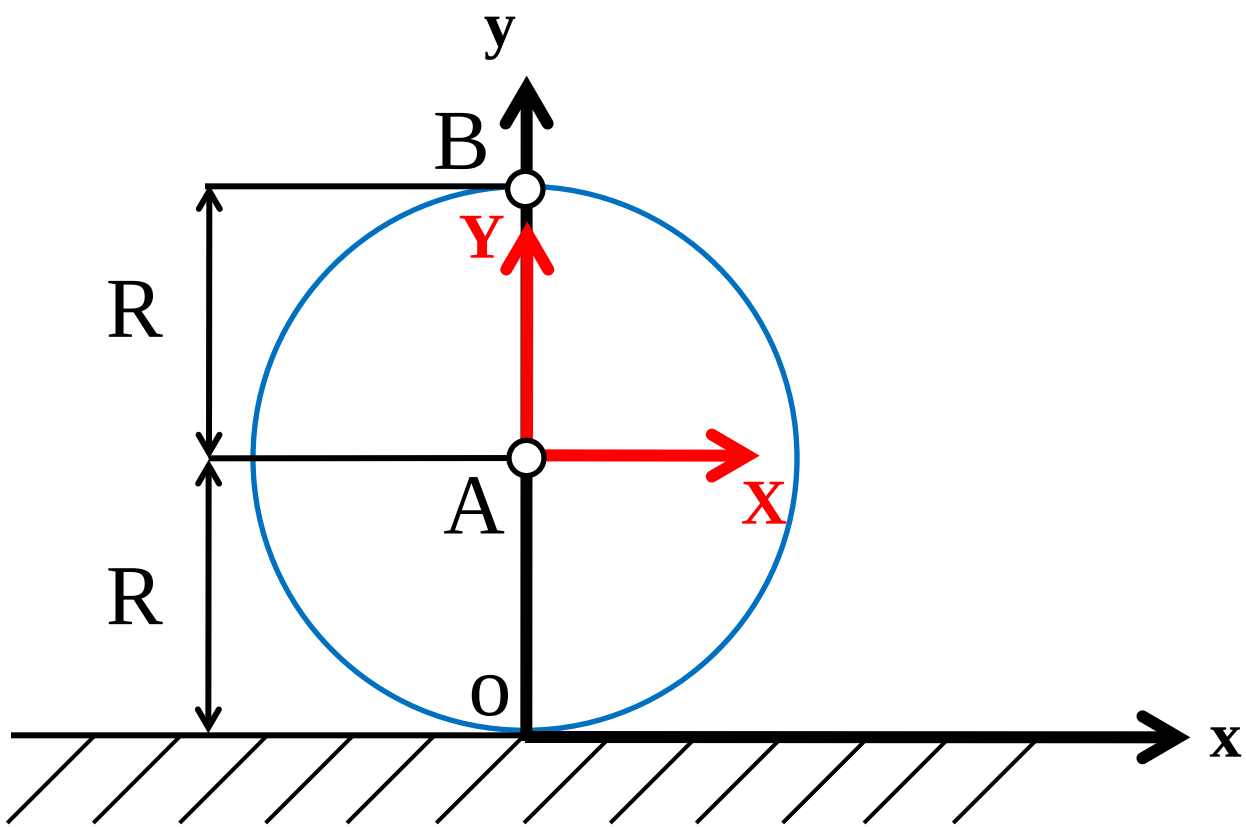
# 例題

（1）円柱と静止節（水平面）の間の瞬間中心はどこか.

（2）円柱の中心の速度が v のとき，円柱上での最大速度はいくらか．またその点はどこか.



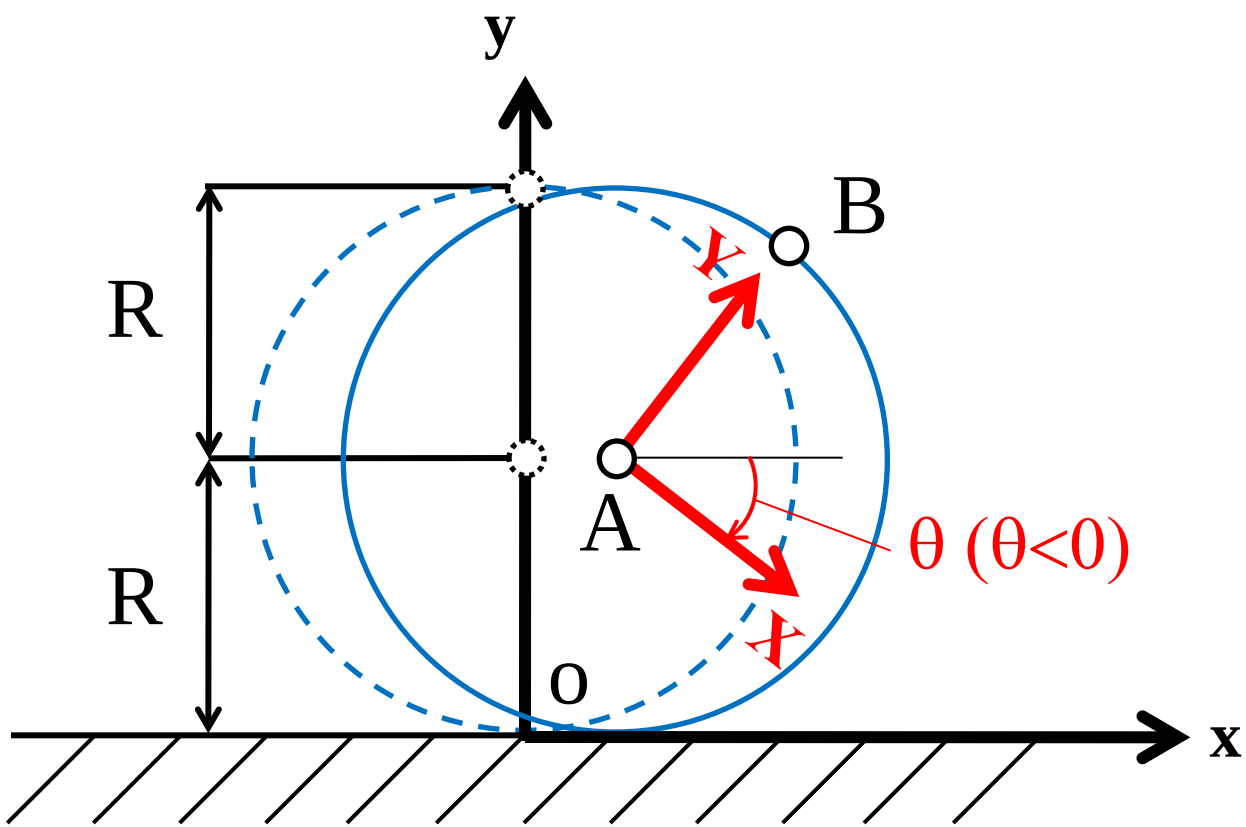
# 例題(1)解答




静止座標系: **o-xy**

動座標系: **A-XY**

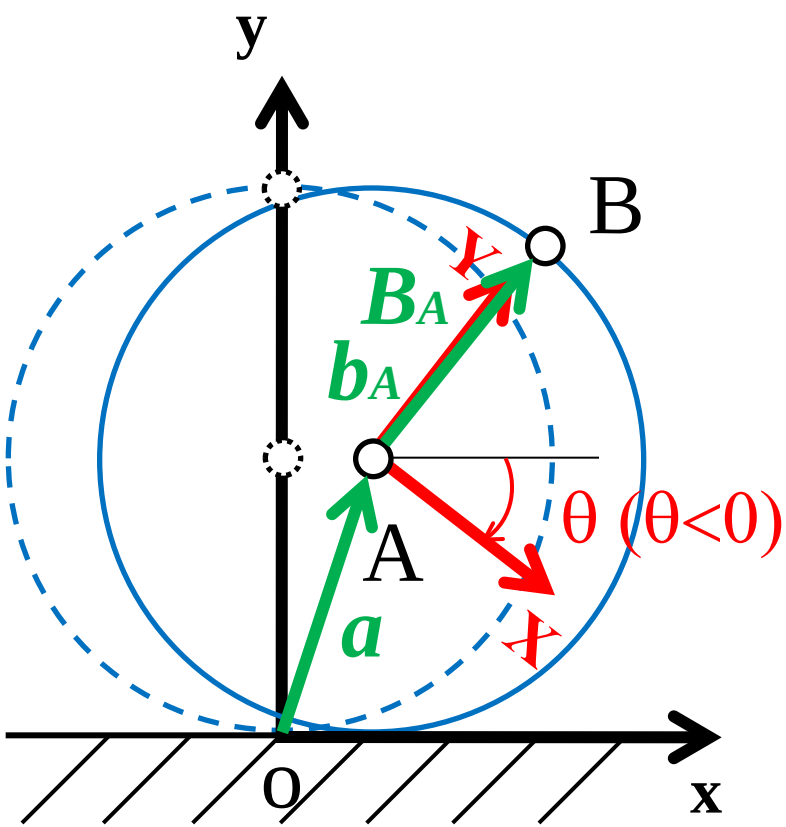
# 例題(1)解答




静止座標系: **o-xy**

動座標系: **A-XY**

# 例題（1）解答




$$\boldsymbol{a} = -R\theta + iR$$ ：静止座標系

$$\boldsymbol{B}_A = iR$$ ：動座標系

$$\boldsymbol{b}_A = \boldsymbol{B}_A e^{i\theta}$$ ：静止座標系

$$= iRe^{i\theta}$$

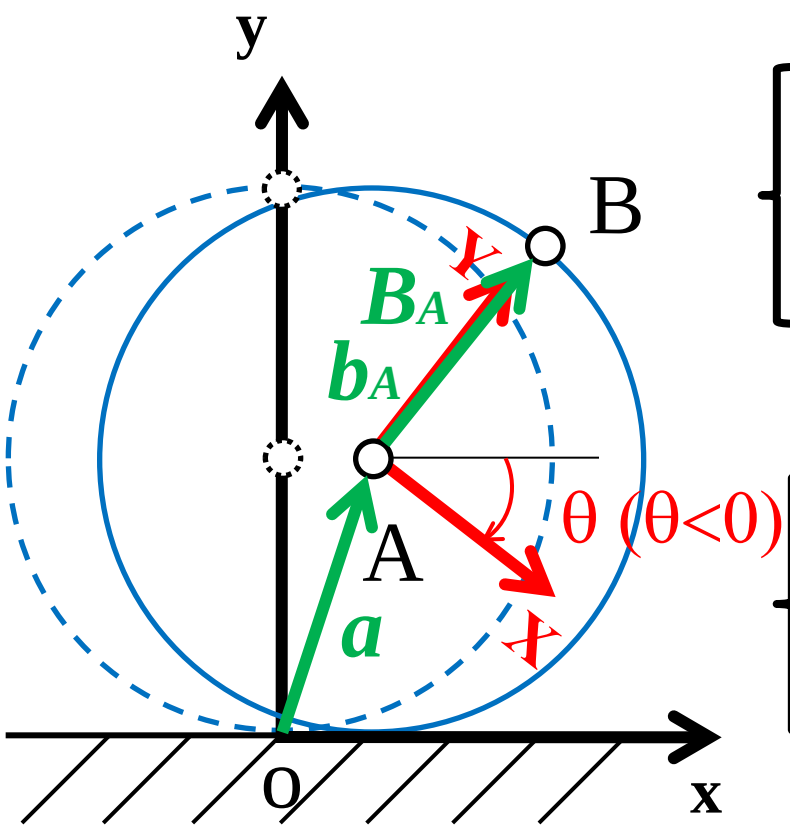
$$= iR(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= -R\sin\theta + iR\cos\theta$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}_A$$

$$= -R(\theta + \sin\theta) + iR(1 + \cos\theta)$$

# 例題（1）解答

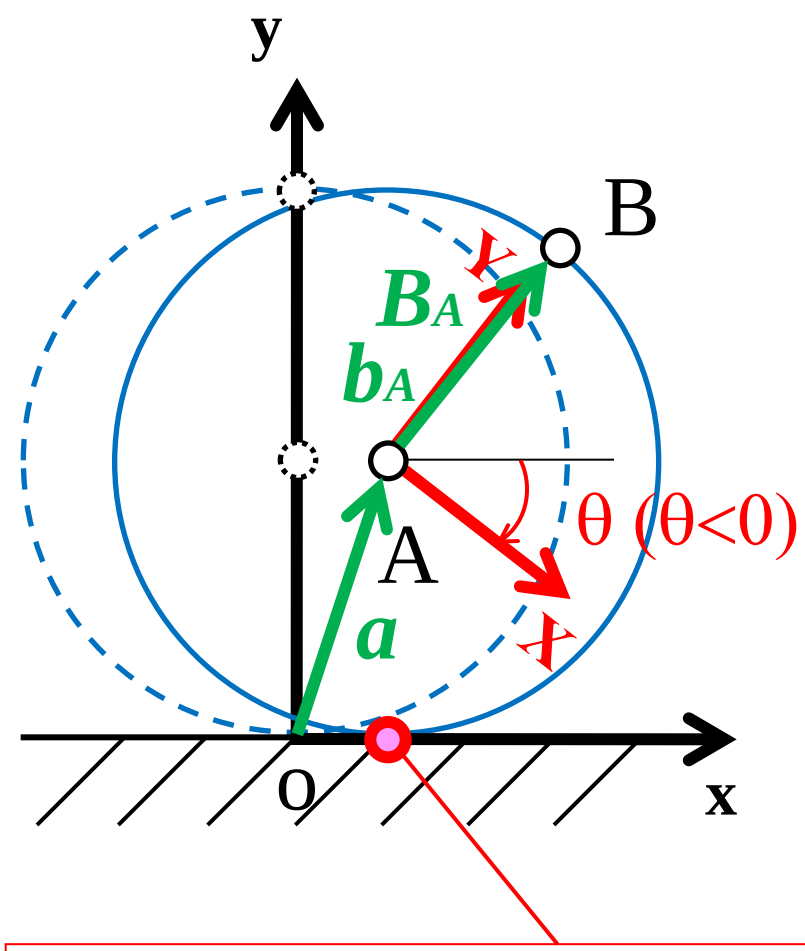



$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = -R\theta + iR \\ \boldsymbol{b} = -R(\theta + \sin\theta) + iR(1 + \cos\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{a}} = -R\dot{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{b}} = -R(\dot{\theta} + \dot{\theta}\cos\theta) + iR(-\dot{\theta}\sin\theta) \end{cases}$$

$$= -R\dot{\theta}(1 + \cos\theta) - iR\dot{\theta}\sin\theta$$

# 例題（1）解答




$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = -R\theta + iR \\ \boldsymbol{b} = -R(\theta + \sin\theta) + iR(1+\cos\theta) \\ \dot{\boldsymbol{a}} = -R\dot{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{b}} = -R\dot{\theta}(1+\cos\theta) - iR\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + i\frac{\dot{\boldsymbol{a}}}{\dot{\theta}} \quad \text{：瞬間中心}$$

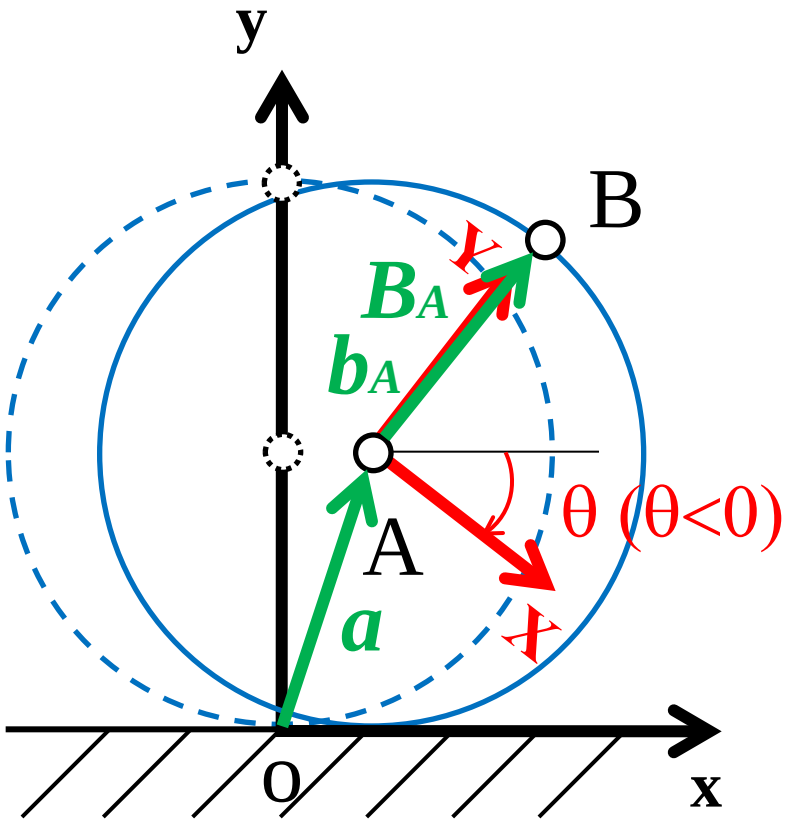
$$= \boxed{-R\theta}$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} + i\frac{\dot{\boldsymbol{b}}}{\dot{\theta}} \quad \text{：瞬間中心}$$

$$= \boxed{-R\theta}$$

円柱と水平面の接点 $(-R\theta, 0)$

# 例題（1）[別解]

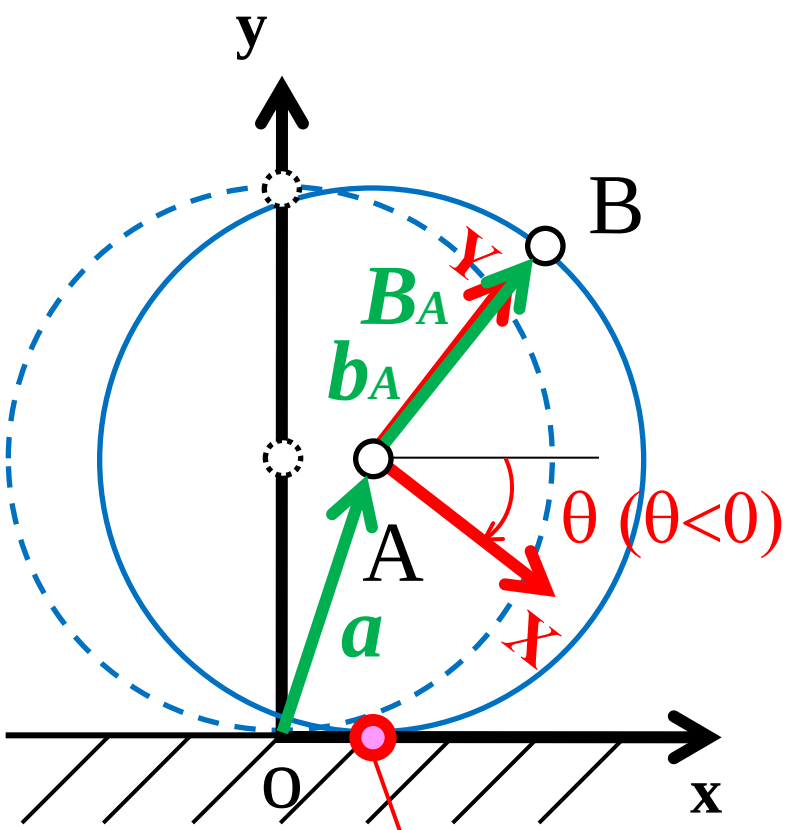



$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\dot{\boldsymbol{a}}}{\dot{\boldsymbol{b}} - \dot{\boldsymbol{a}}}$$ :瞬間中心

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = -R\theta + iR \\ \boldsymbol{b} = -R(\theta + \sin\theta) + iR(1 + \cos\theta) \\ \dot{\boldsymbol{a}} = -R\dot{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{b}} = -R\dot{\theta}(1 + \cos\theta) - iR\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\dot{\boldsymbol{a}} = R^2\theta\dot{\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \dot{\boldsymbol{b}} - \dot{\boldsymbol{a}} = -R\dot{\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) \end{cases}$$

# 例題（1）[別解]




$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\dot{\boldsymbol{a}}}{\dot{\boldsymbol{b}} - \dot{\boldsymbol{a}}} \text{：瞬間中心}$$

$$= \frac{R^2\theta\dot{\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)}{-R\dot{\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

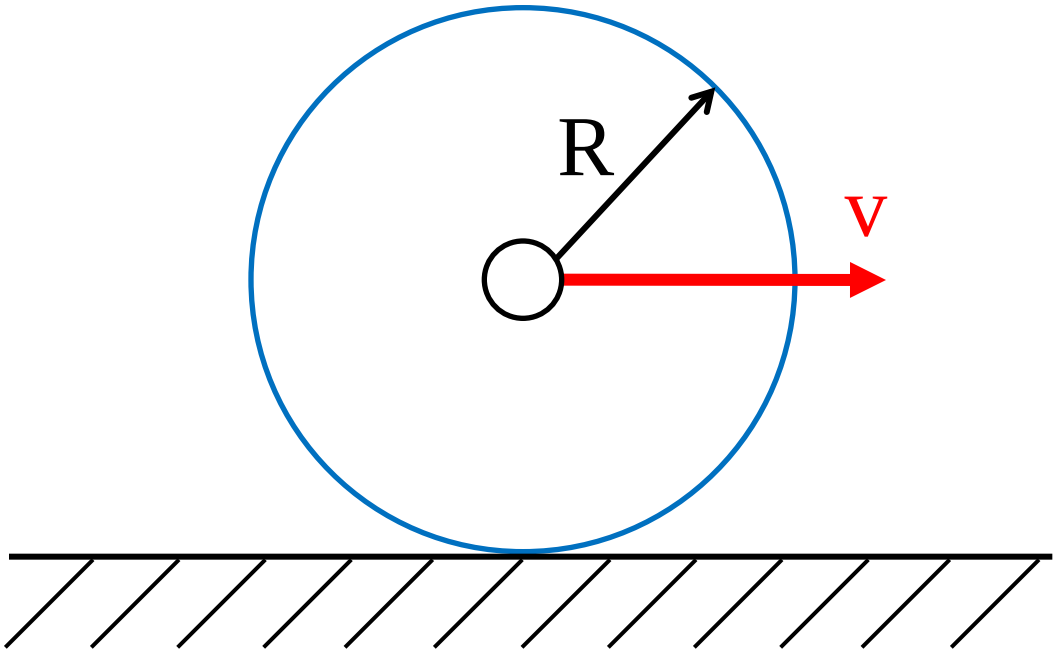
$$= \boxed{-R\theta}$$

円柱と水平面の接点 $(-R\theta, 0)$

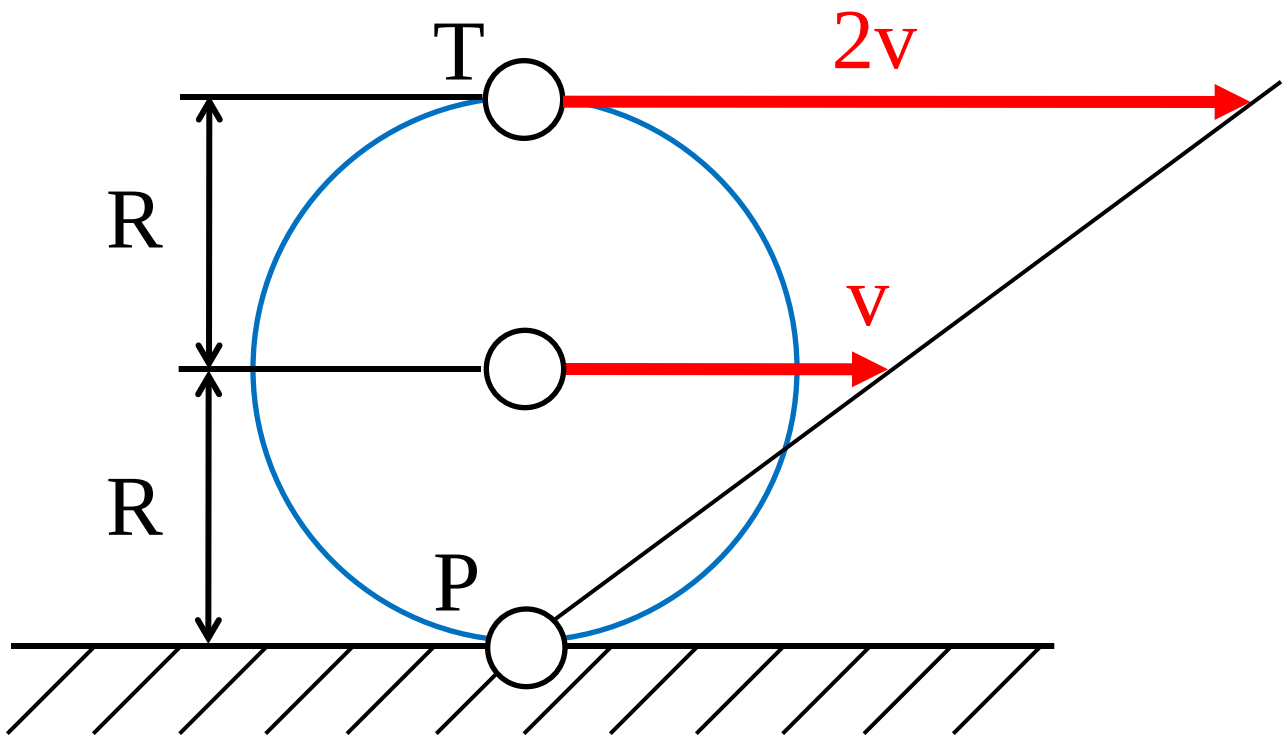
# 例題

（1）円柱と静止節（水平面）の間の瞬間中心はどこか.

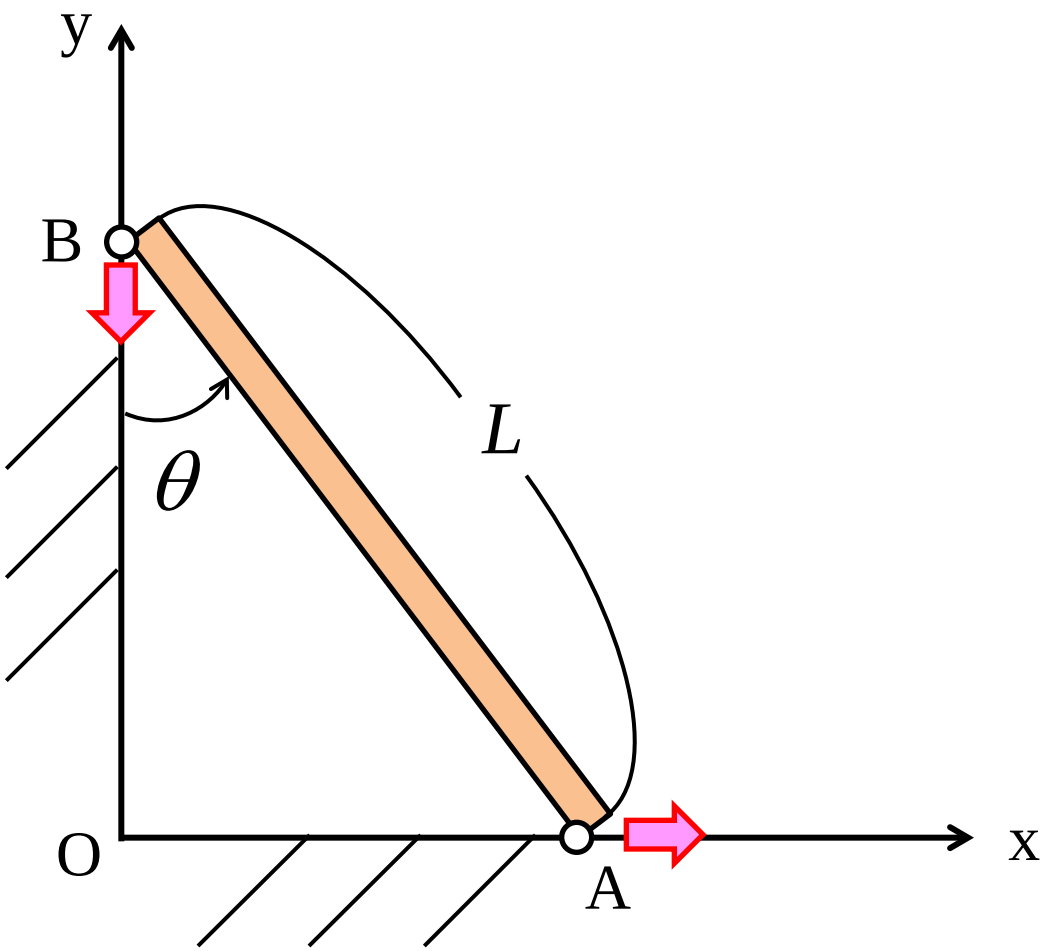
（2）円柱の中心の速度が v のとき，円柱上での最大速度はいくらか．またその点はどこか.



# 例題(2)解答




(2)最大速度:2v(点T)

# 演習問題

下図の棒の瞬間中心はどこか.