



The background features a green wireframe silhouette of a human head in profile, facing left. Overlaid on this are several technical drawings and icons. On the left, a circular cross-section of a mechanical part is shown with dimensions: 120, 80, 55, 35, 10, and a central hole of 55. Below it, a side view of a mechanical assembly is shown with dimensions: 61, 55, 35, 14, 200, and 55. On the right, a top-down view of a rectangular component is shown with dimensions: 140, 140, 370, and 370. Above the head, there is a small icon of an airplane and a text box that reads: "Hyper Human Technology" and "Spikes new model towards 21st century". Below the head, there is a small icon of a radiation symbol and a text box that reads: "130452001-Hyper H Technology" and "Spikes new model towards 21st century".

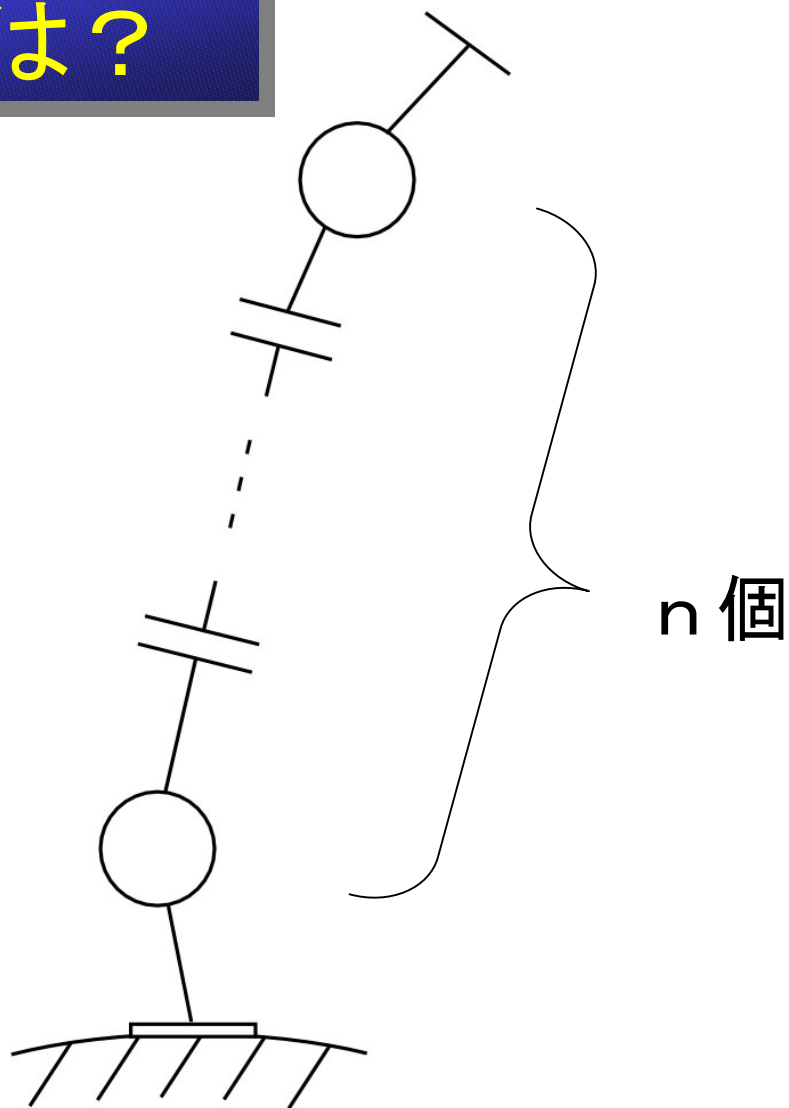
機構学

演習問題と解答例

金子真

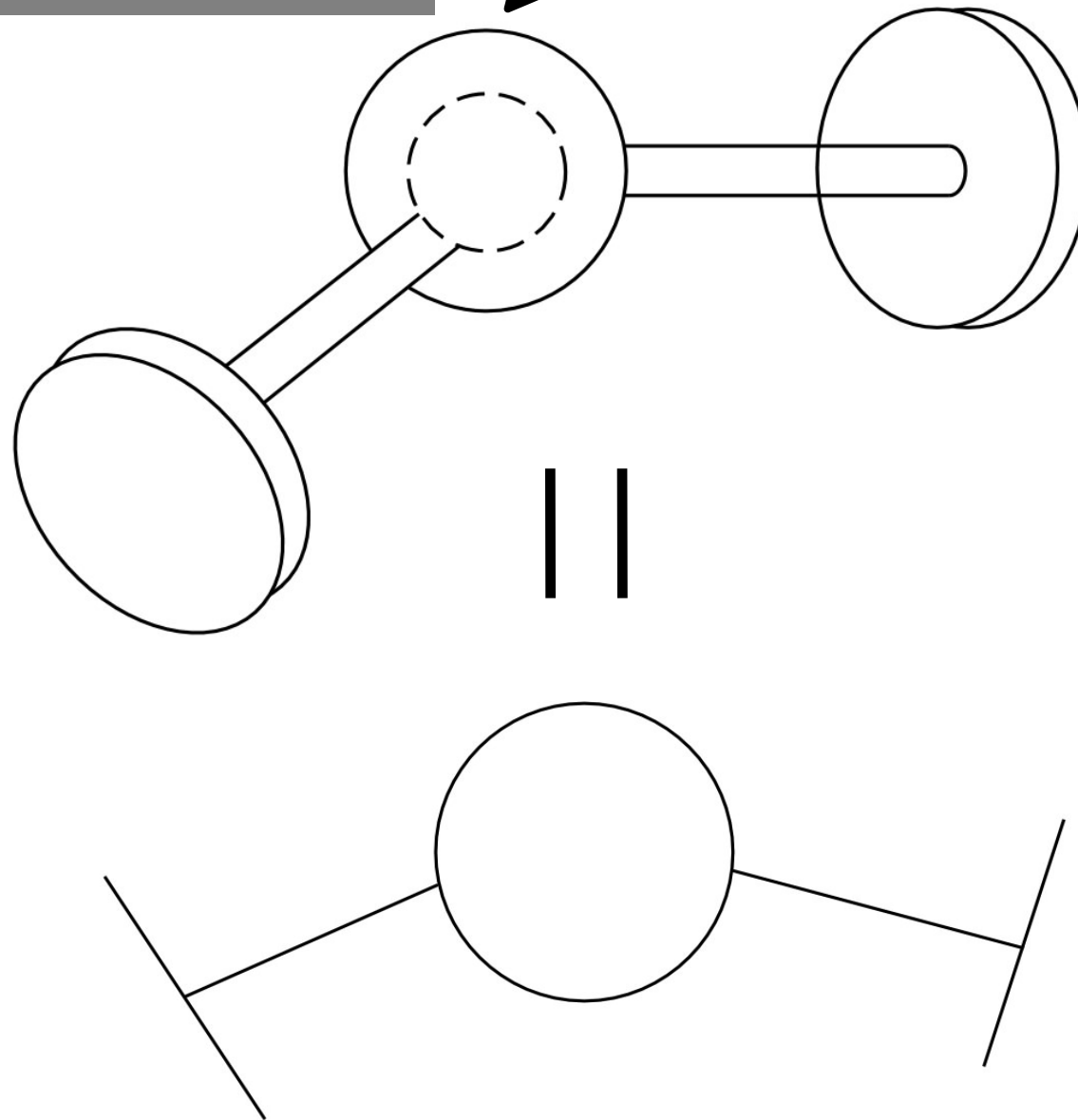
課題4は講義の際に解き方を説明しています。
課題11, 課題12(3)は試験範囲外とします。
※:ここに入っている問題以外にも演習問題として
講義で出しています。そちらもしっかり目を通して
おいてください。

課題0: 球関節が n 個 連なったらFkは？

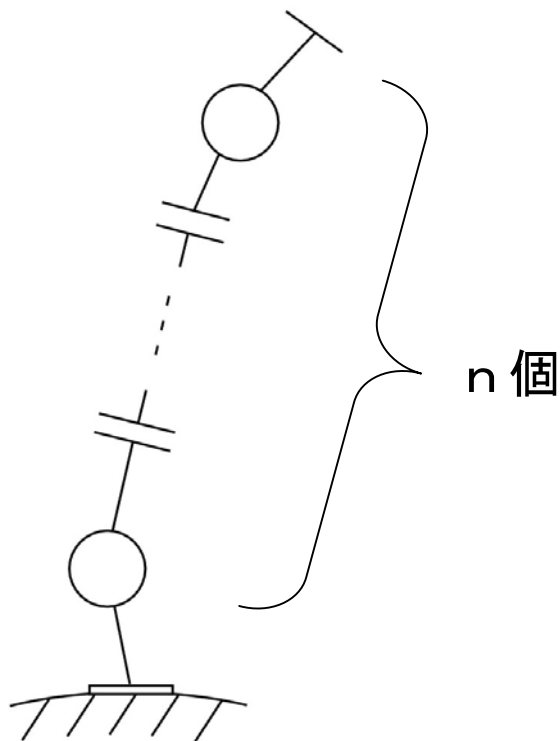


球関節の自由度

3 自由度！！



課題0の答え



$$N = n + 1$$

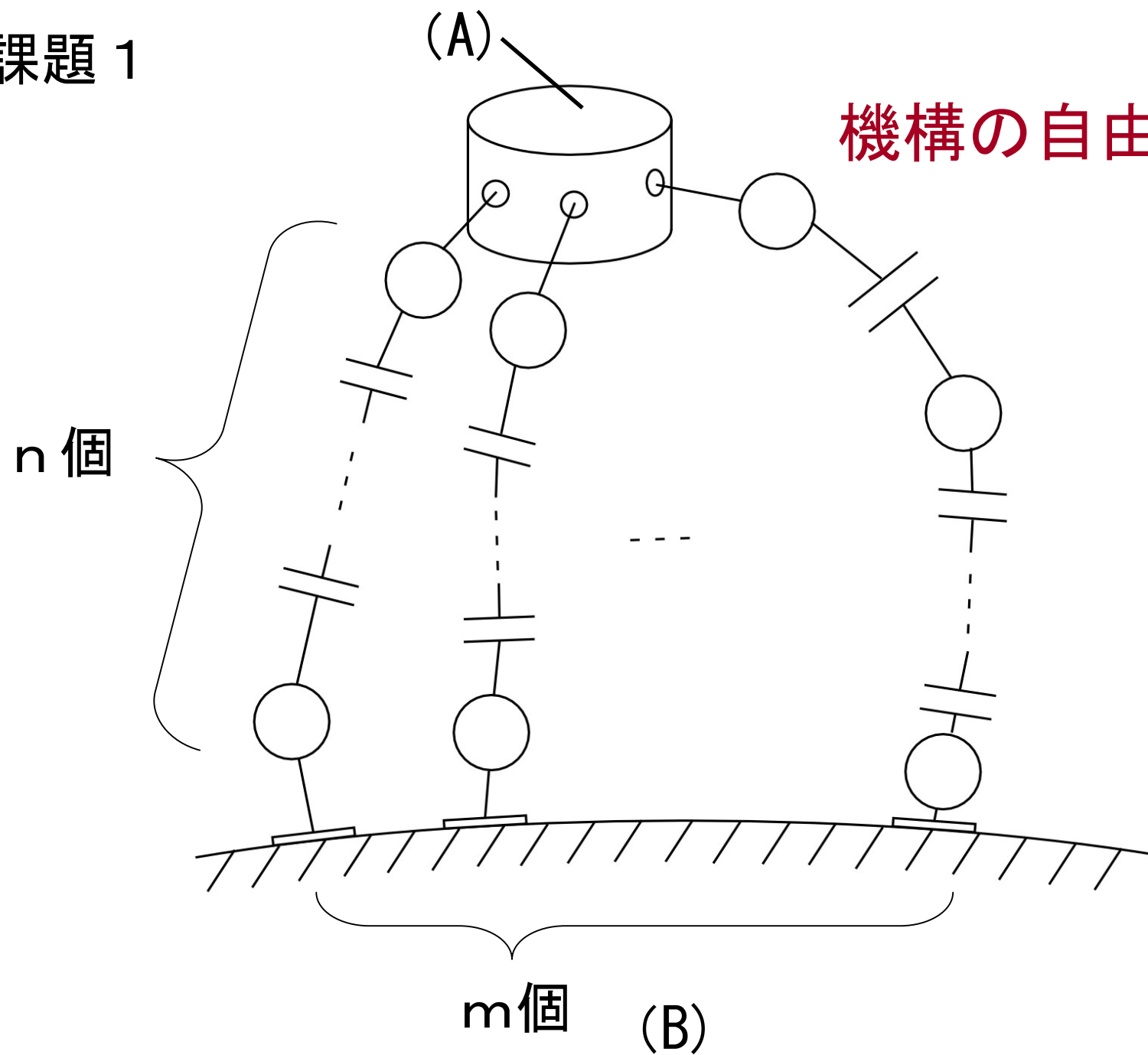
$$J = n$$

$$\sum f_i = 3 \times n$$

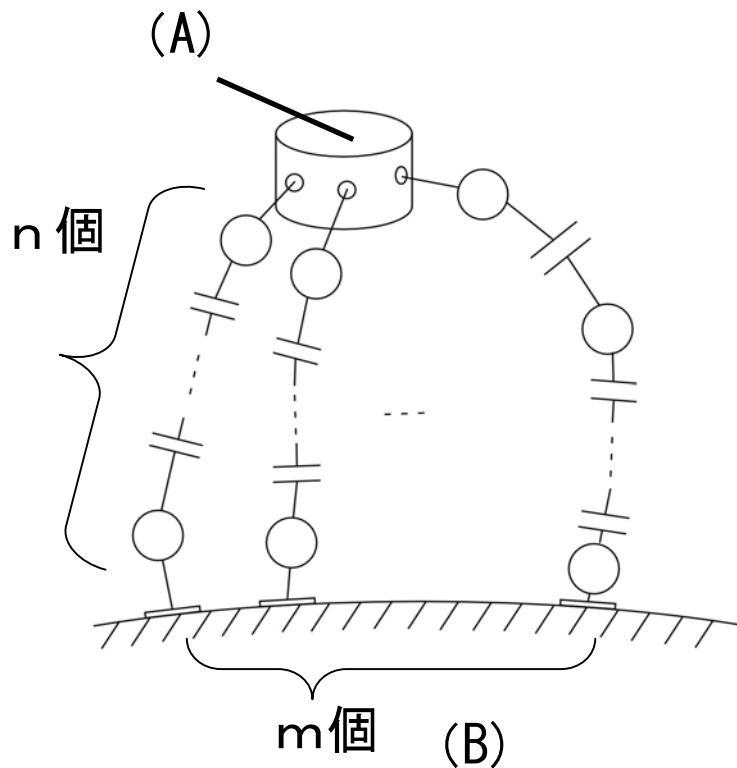
$$F = 6(N - J - 1) + \sum f_i = 3n$$

課題 1

機構の自由度は？



課題 1 の答え

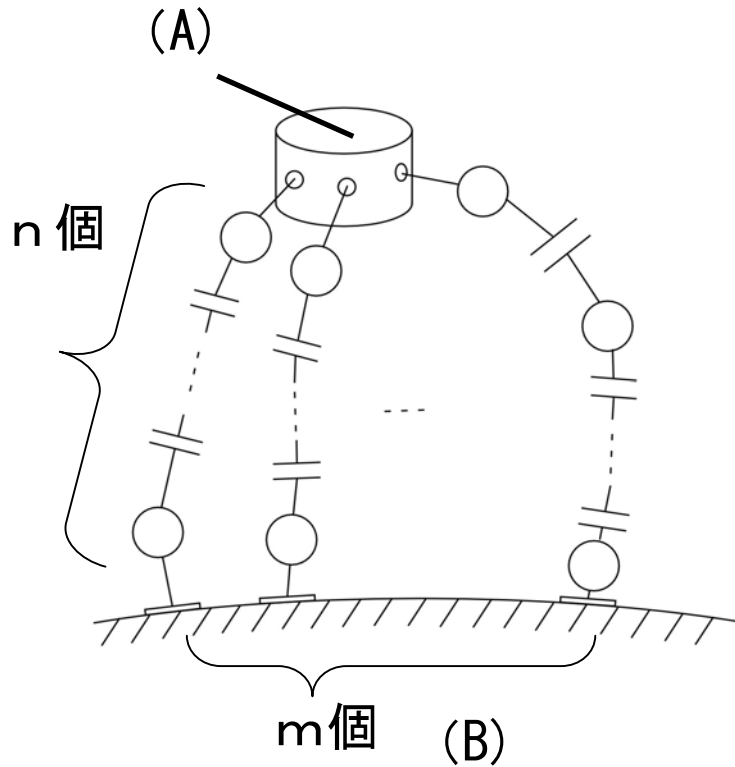


$$N = 2 + (n - 1)m$$

$$J = n \times m$$

$$\begin{aligned} F &= 6(N - J - 1) + \sum f_i \\ &= 6\{2 + (n - 1)m - nm - 1\} + 3mn \\ &= 6 - 6m + 3mn \end{aligned}$$

課題 1 の答え



$$\left. \begin{array}{l} n = 1 \\ m = 2 \end{array} \right\} \text{ のとき}$$

$$N = 2 + (n - 1)m = 2$$

$$J = n \times m = 2$$

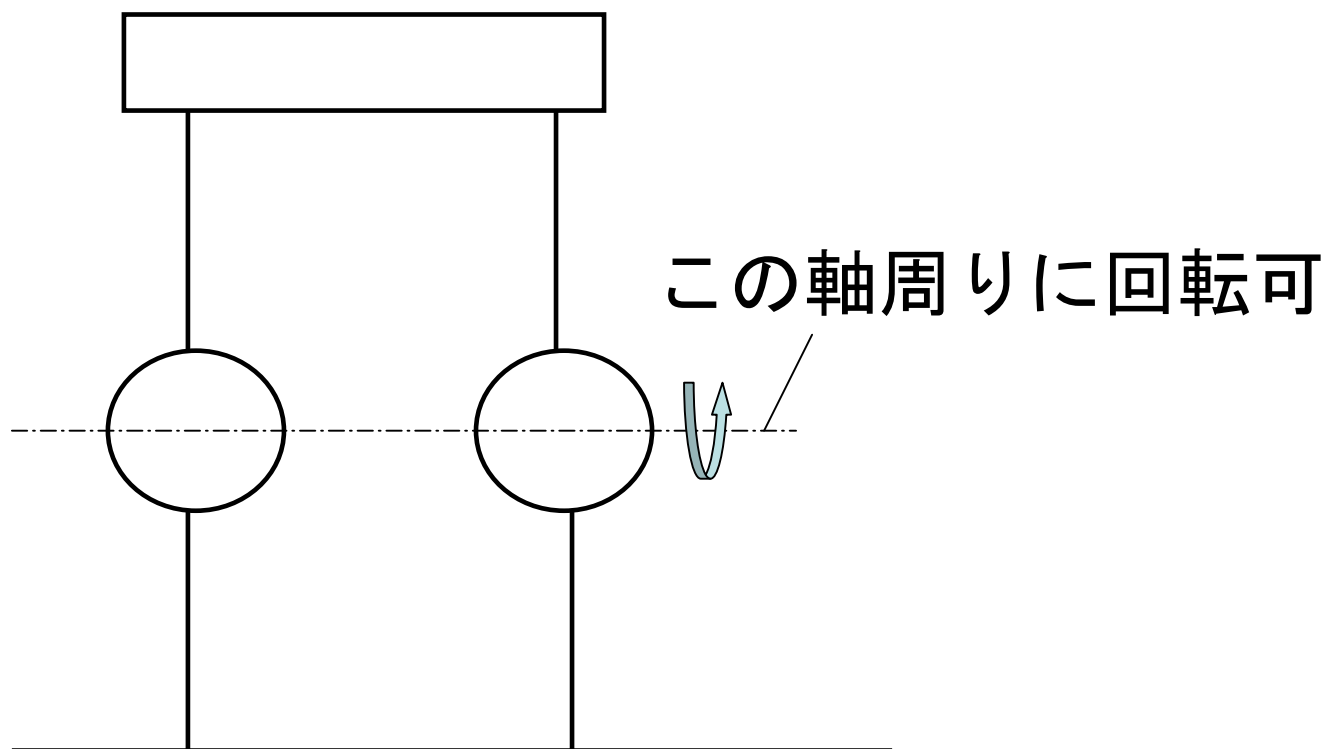
$$F = 6(N - J - 1) + \sum f_i$$

$$= 6(2 - 2 - 1) + 6$$

でも実際の自由度はゼロじゃない！

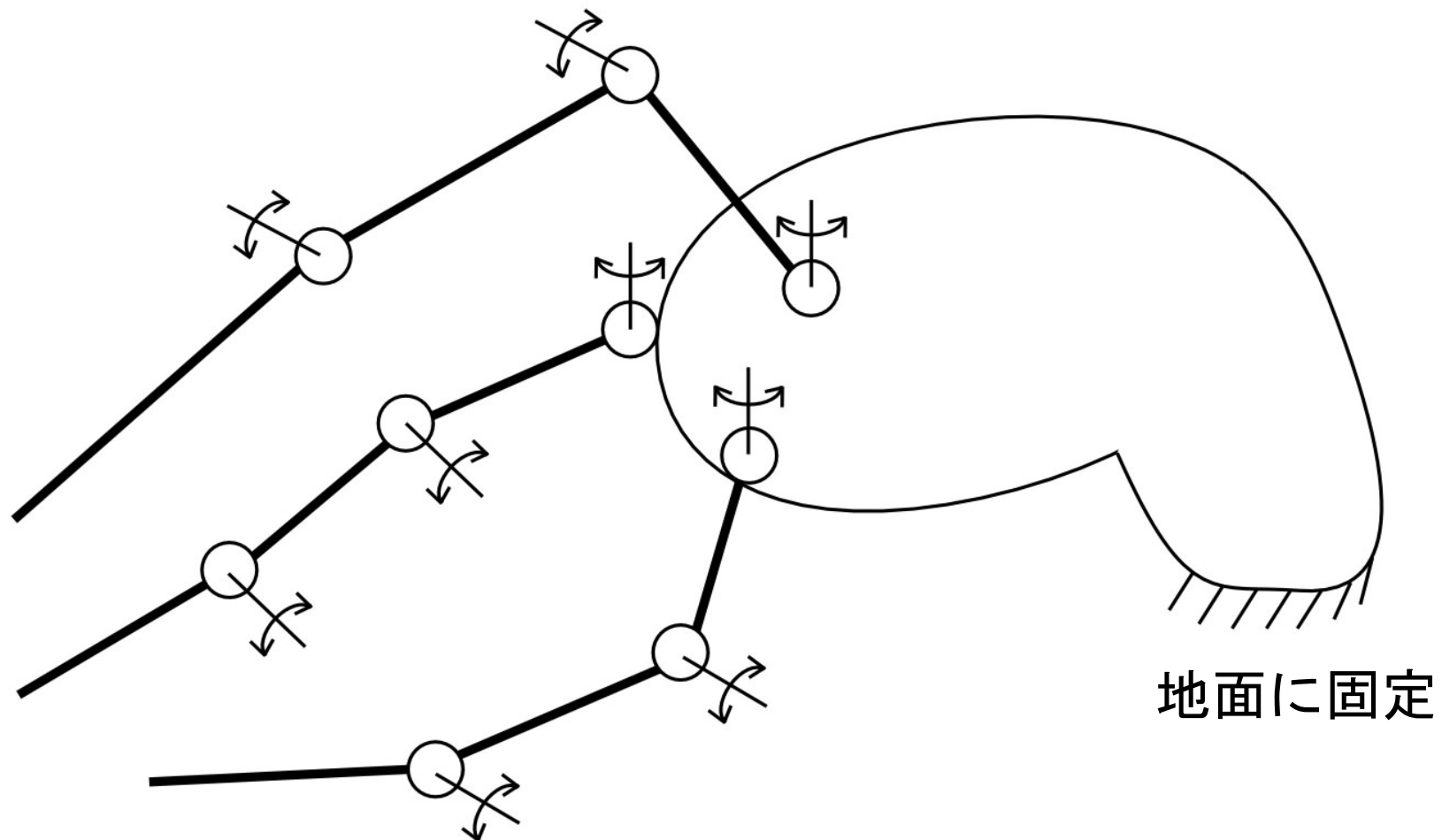
$$= 0$$

$F = 0$ でも自由度がゼロにならない例

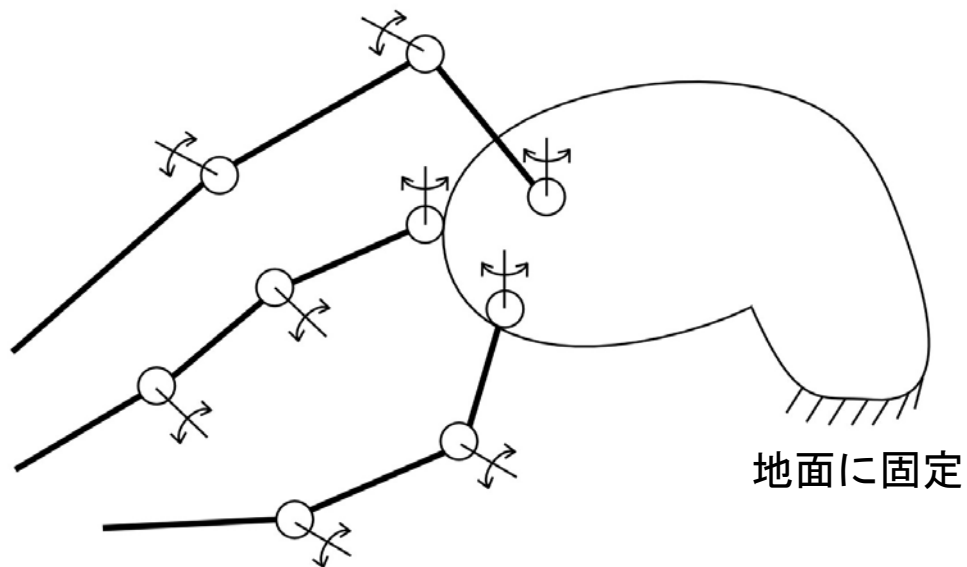


課題 2

機構の自由度は？



課題 2 の答え



$$N = 10$$

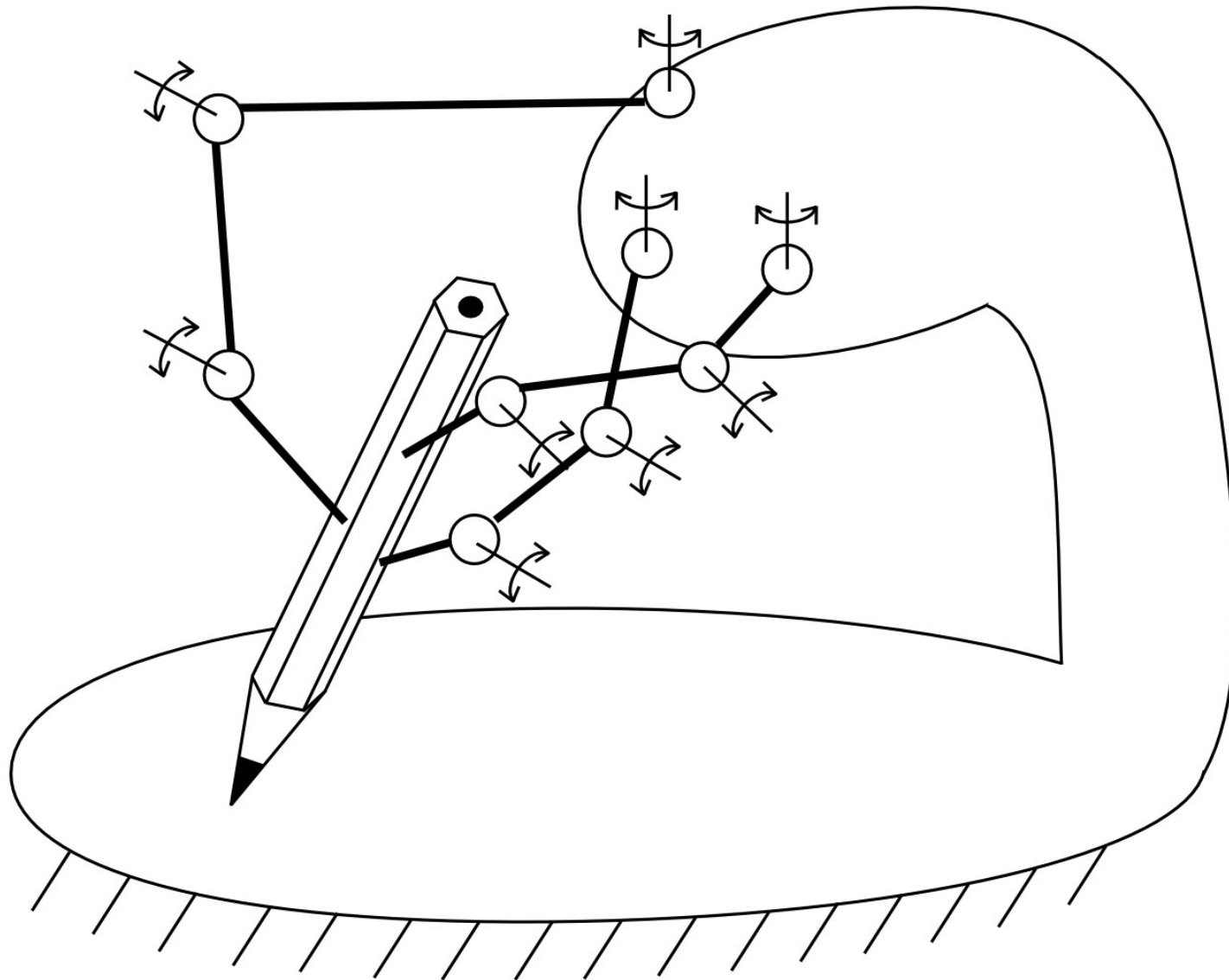
$$J = 9$$

$$\sum f_i = 9$$

$$F = 6(N - J - 1) + \sum f_i$$
$$= 9$$

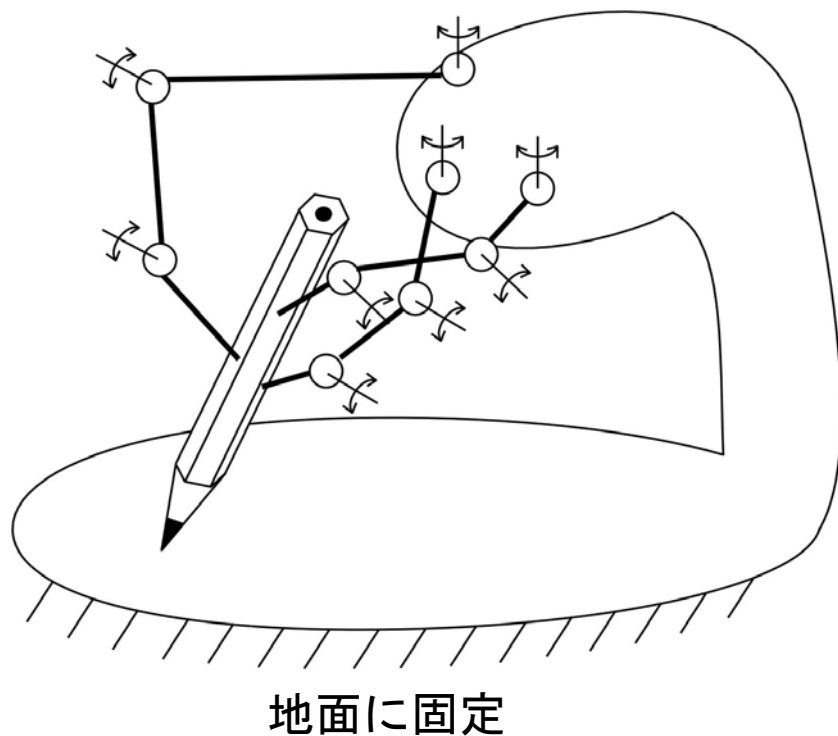
課題 3

機構の自由度は？



地面に固定

課題 3 の答え



$$N = 11$$

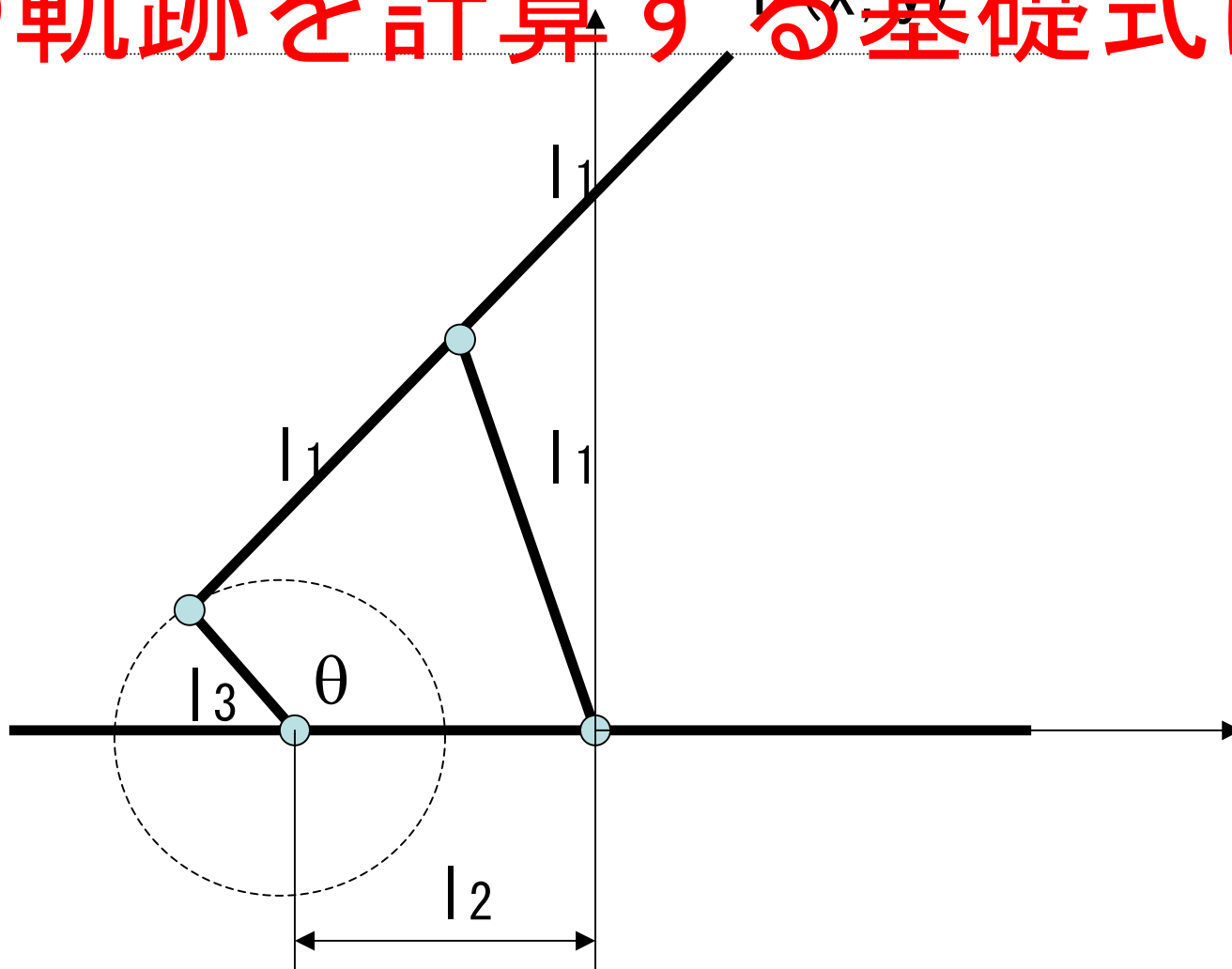
$$J = 13$$

$$\sum f_i = 9 + 3 \times 4 = 12$$

$$\begin{aligned} F &= 6(N - J - 1) + \sum f_i \\ &= 3 \end{aligned}$$

課題4: 4節リンク機構

点Pの軌跡を計算する基礎式は？



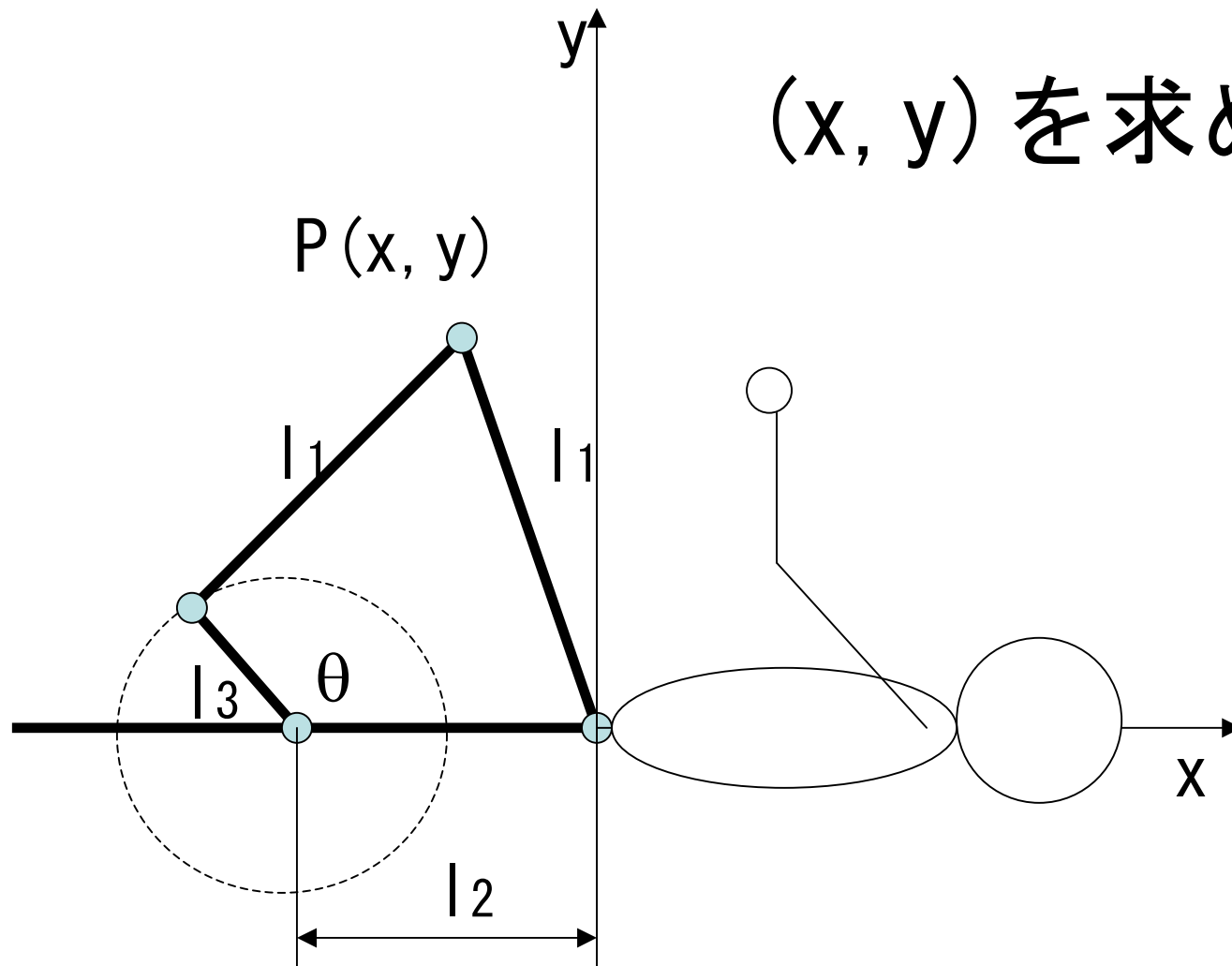
$$x^2 + y^2 + k_2^2 (k_1^2 - 2k_1 \cos \theta + 1) l_1^2 = 4l_1^2$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin \theta}{k_1 - \cos \theta}$$

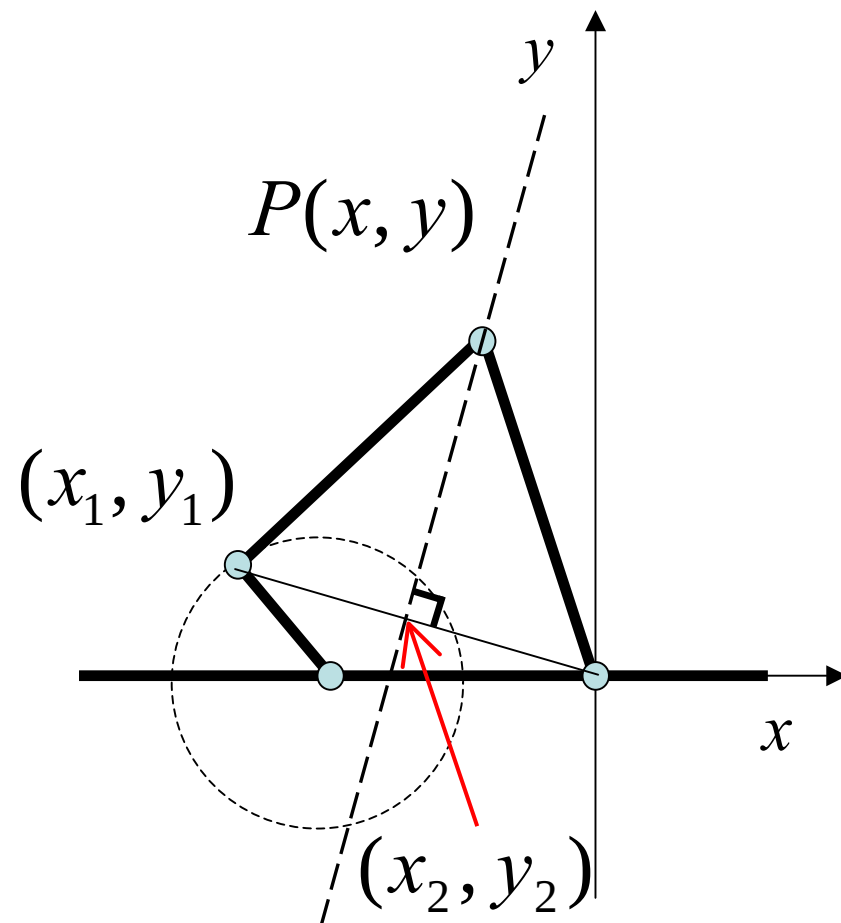
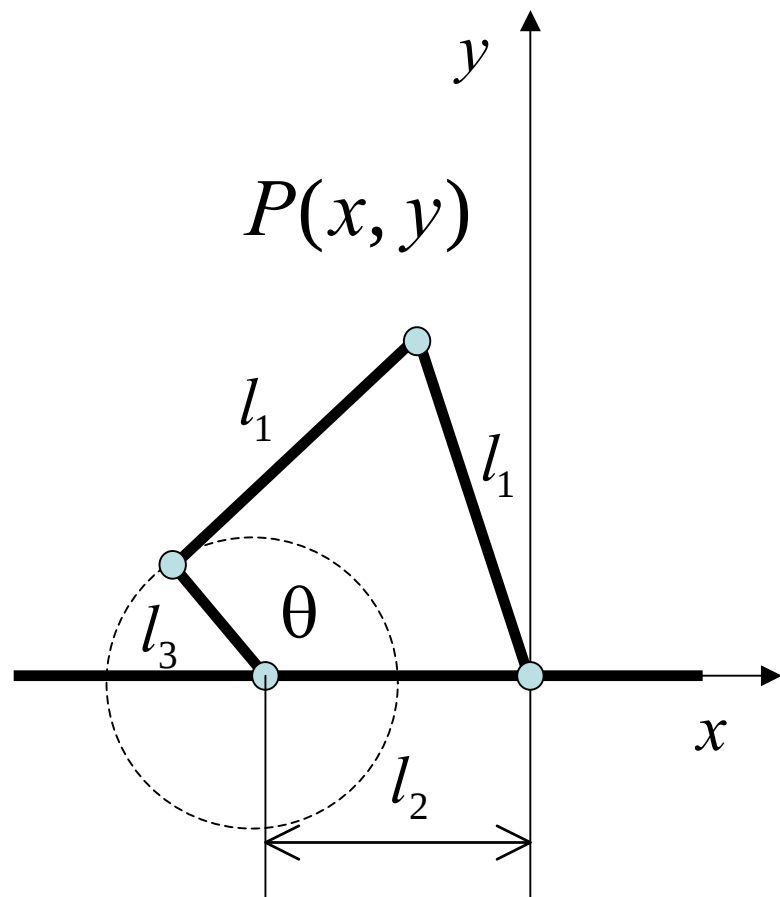
$$k_1 = \frac{l_2}{l_3} \quad k_2 = \frac{l_3}{l_1}$$

課題5: 自転車型4節リンク機構

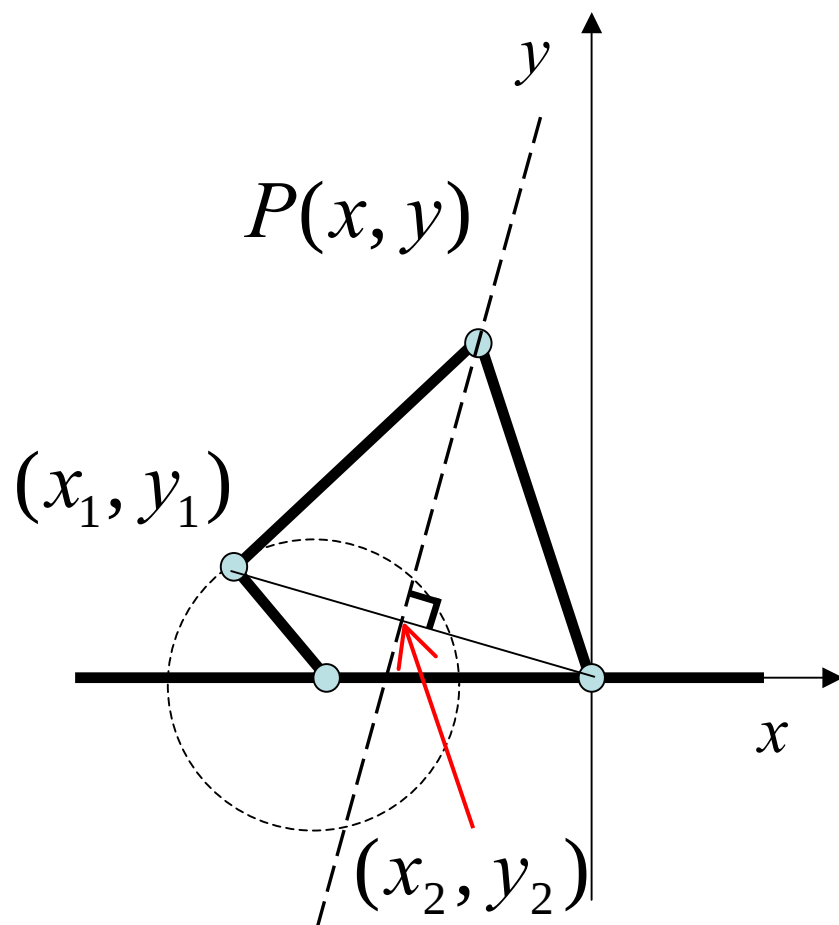
(x, y) を求めよ



課題5: 自転車型4節リンク機構



課題5: 自転車型4節リンク機構



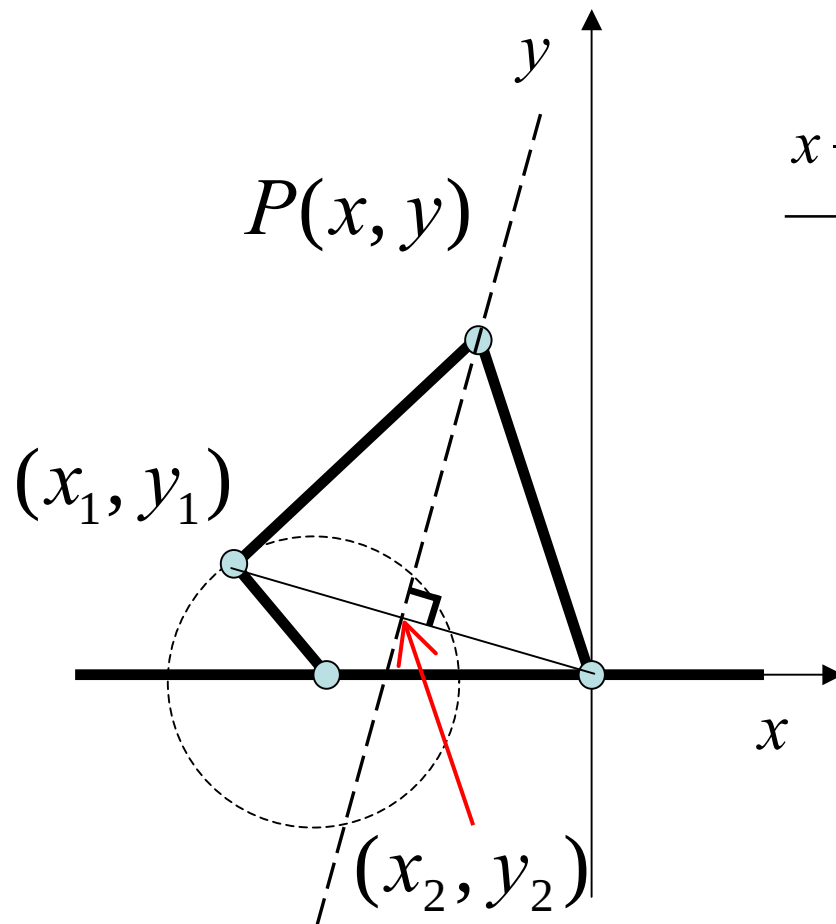
$$x_1 = -l_2 + l_3 \cos \theta$$

$$y_1 = l_3 \sin \theta$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(-l_2 + l_3 \cos \theta)$$

$$y_2 = \frac{1}{2}l_3 \sin \theta$$

課題5: 自転車型4節リンク機構

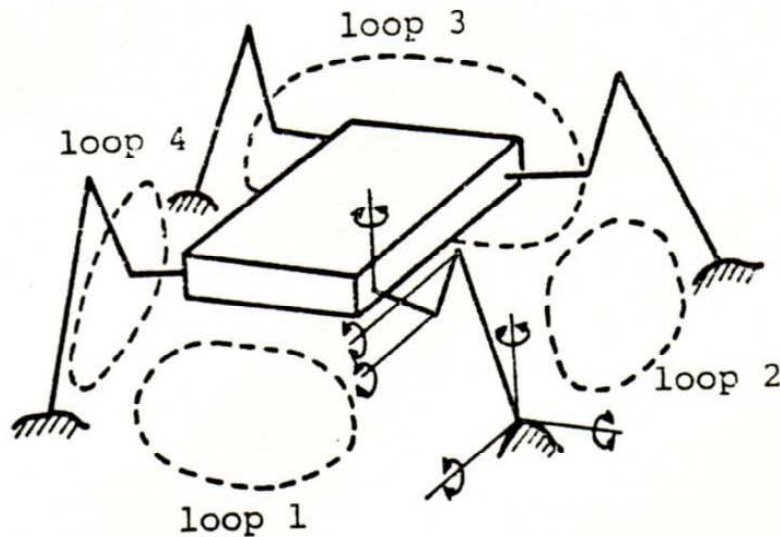


$$\frac{x - \frac{1}{2}(-l_2 + l_3 \cos \theta)}{y - \frac{1}{2}l_3 \sin \theta} \cdot \frac{-\frac{1}{2}(-l_2 + l_3 \cos \theta)}{-\frac{1}{2}l_3 \sin \theta} = -1$$

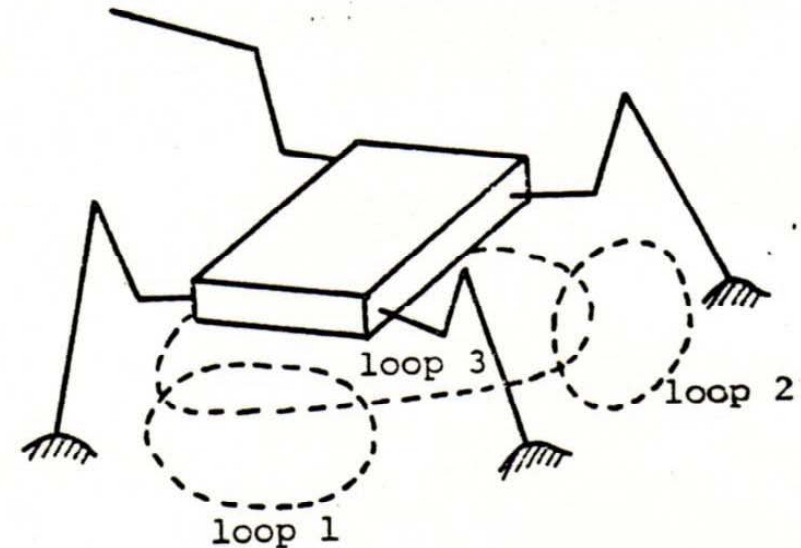
$$l_1^2 = \frac{1}{4}(-l_2 + l_3 \cos \theta)^2 + \frac{1}{4}l_3^2 \sin^2 \theta + \left\{ x - \frac{1}{2}(-l_2 + l_3 \cos \theta) \right\}^2 + \left(y - \frac{1}{2}l_3 \sin \theta \right)^2$$

課題6: 歩行ロボットの機構の自由度

(1) $F_k=6$



$F_k=9$



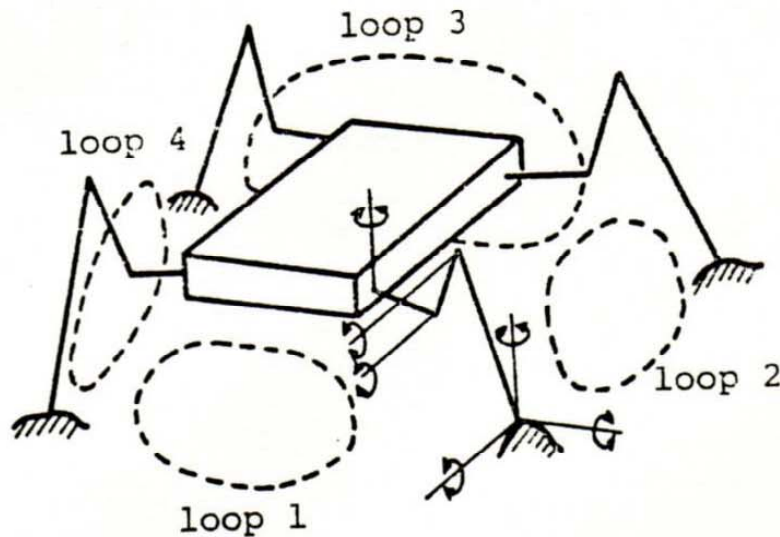
(2) n 本足ロボットが全脚接地の場合の $F_k=6$

(3) 独立な閉loopの数 m と F_k の関係を示せ?

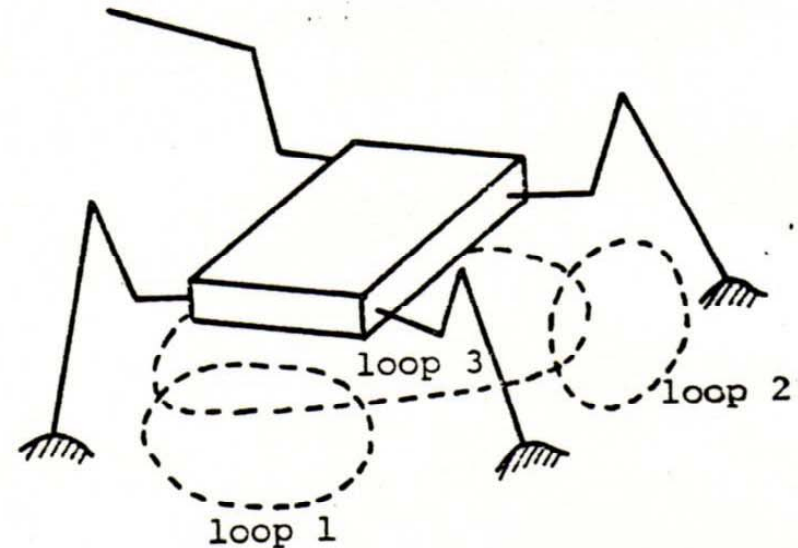
$$F_k = -6m + \sum f_i$$

課題6: 補足説明

(1) 全脚接地 : $N=3 \times 4 + 2 = 14$, $J=4 \times 4 = 16$
 $F_k = 6(N - J - 1) + \sum f_i = -18 + 6 \times 4 = 6$



3 脚接地 : $N=3 \times 4 + 2 = 14$, $J=4 \times 3 + 3 = 15$
 $F_k = 6(N - J - 1) + \sum f_i = -12 + 6 \times 3 + 3 = 9$

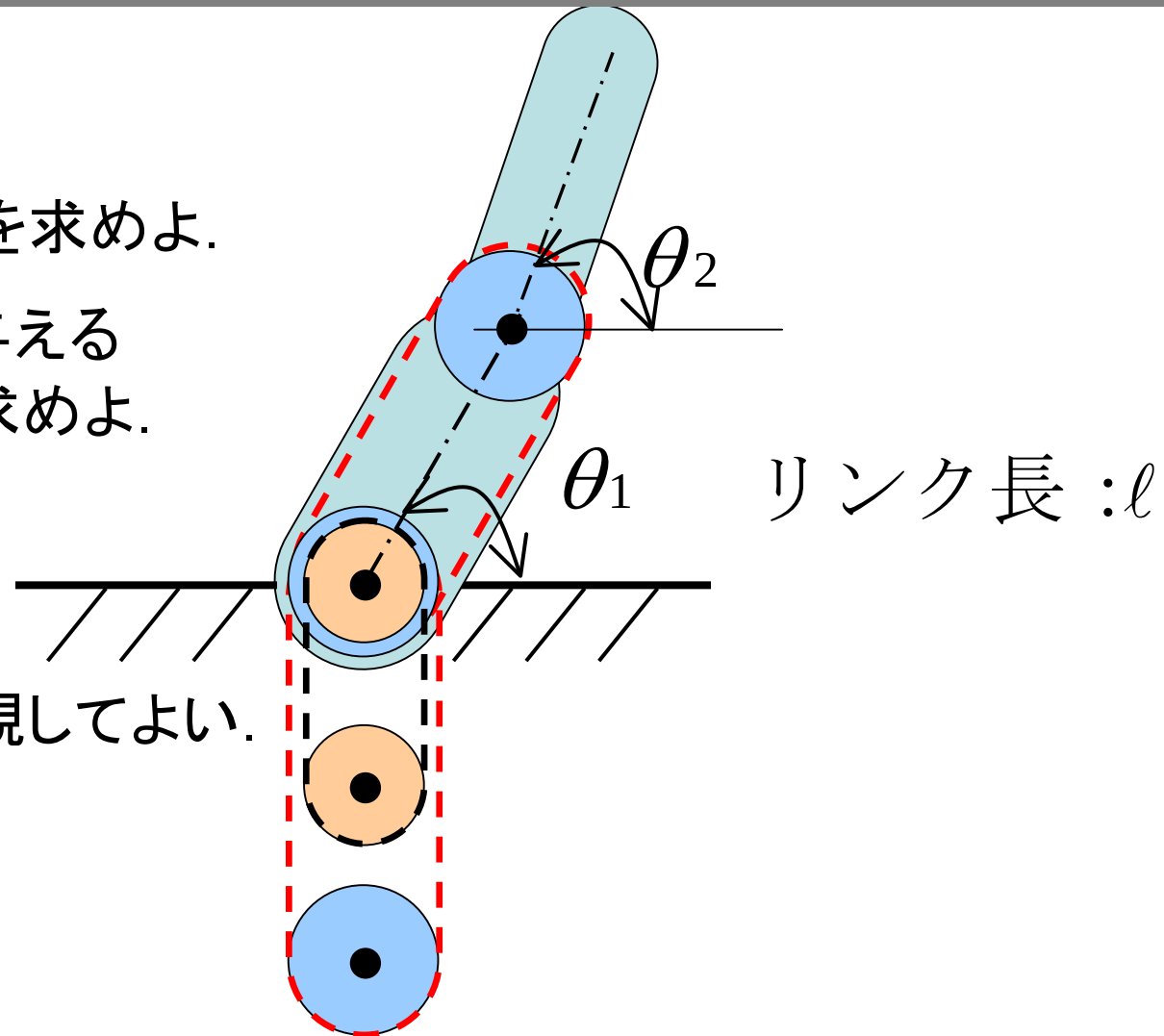


(2) $N=3n+2$, $J=4n$, $F_k = 6(N - J - 1) + \sum f_i = -6n + 6 + 6n = 6$ (n に依存しない点に注意！)

(3) 閉loopがないときは $N - J - 1 = 0$ になる. 閉ループの数 m とすると,
 $F_k = -6m + \sum f_i$ となる.

課題7: 絶対系にモータがついている場合の2リンク
ロボットについて以下の問いに答えよ.

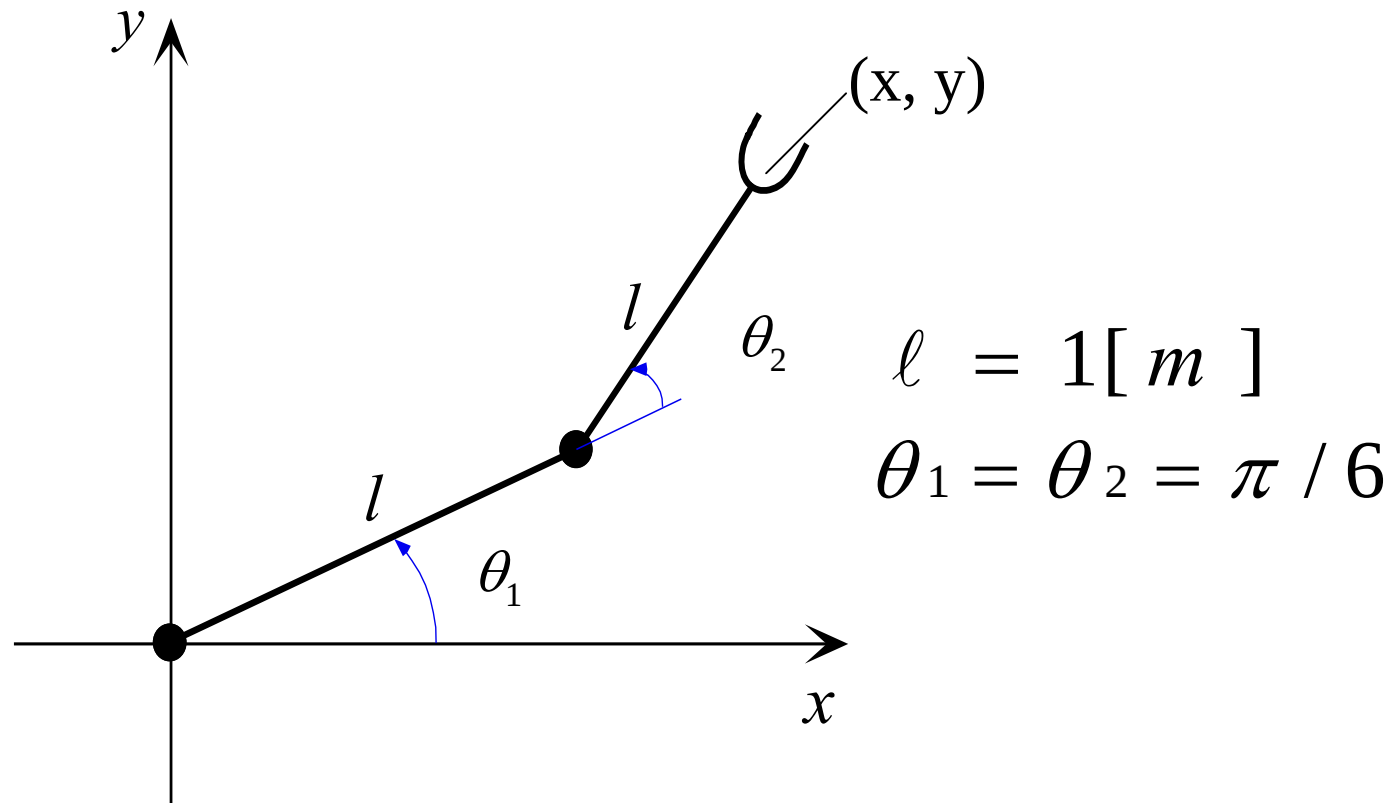
1. ヤコビ行列 J を求めよ.
2. 特異姿勢を与える
 (θ_1, θ_2) を求めよ.

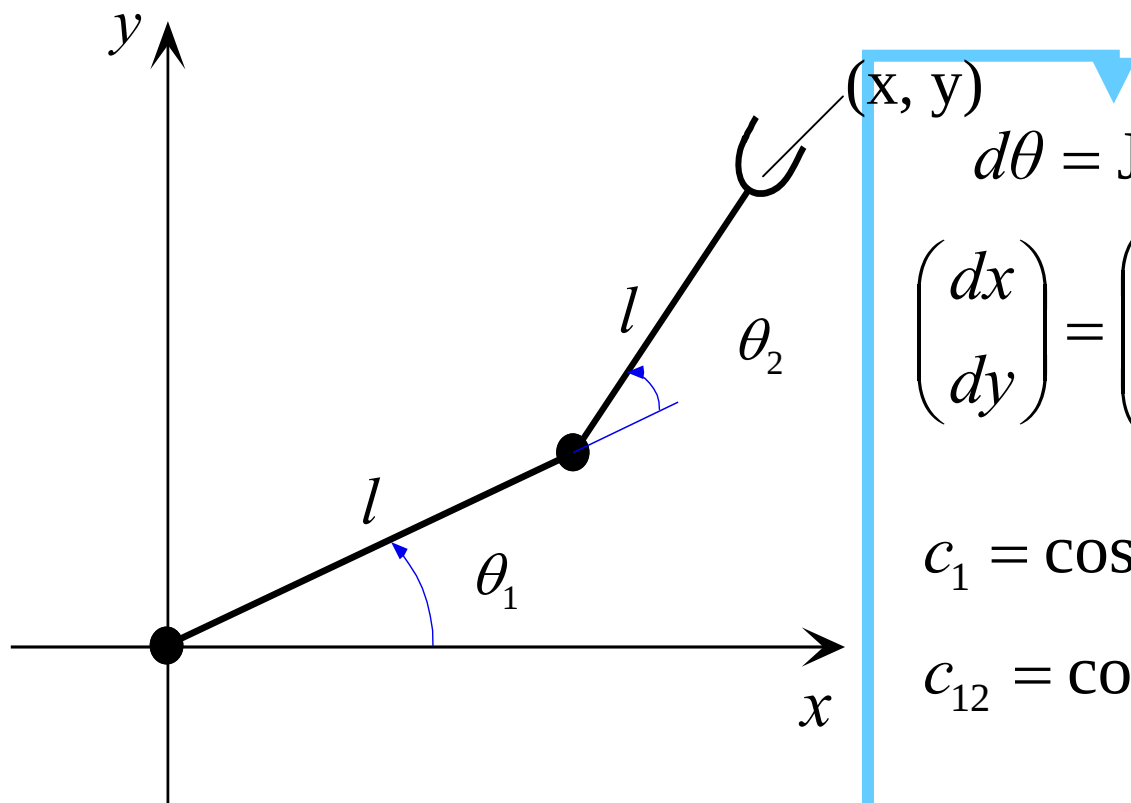


* リンクの幅は無視してよい.

課題8: 2リンクロボットに対して次の問いに答えよ

ロボット先端を $(\Delta x, \Delta y) = (0.1, 0.1)[\text{m}]$ 移動させるのに必要な各関節の角度変化 $(\Delta \theta_1, \Delta \theta_2)$ を求めよ.





$$d\mathbf{x} = \mathbf{J}d\theta$$

$$d\theta = \mathbf{J}^{-1}d\mathbf{x} \quad (\text{if } |\mathbf{J}| \neq 0)$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ls_1 - ls_{12} & -ls_{12} \\ lc_1 + lc_{12} & lc_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = \cos \theta_1, \quad s_1 = \sin \theta_1$$

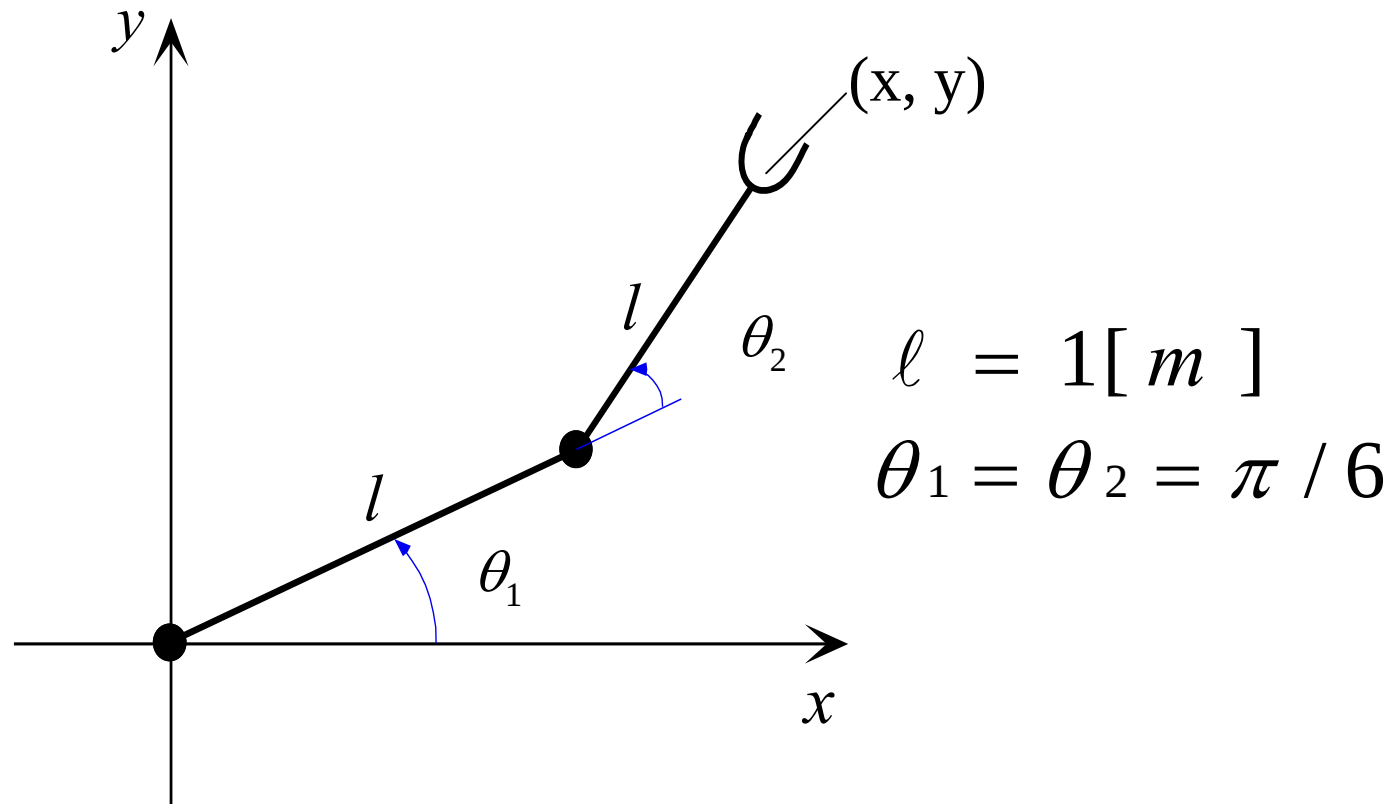
$$c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{pmatrix} lc_{12} & ls_{12} \\ -lc_1 - lc_{12} & -ls_1 - ls_{12} \end{pmatrix}$$

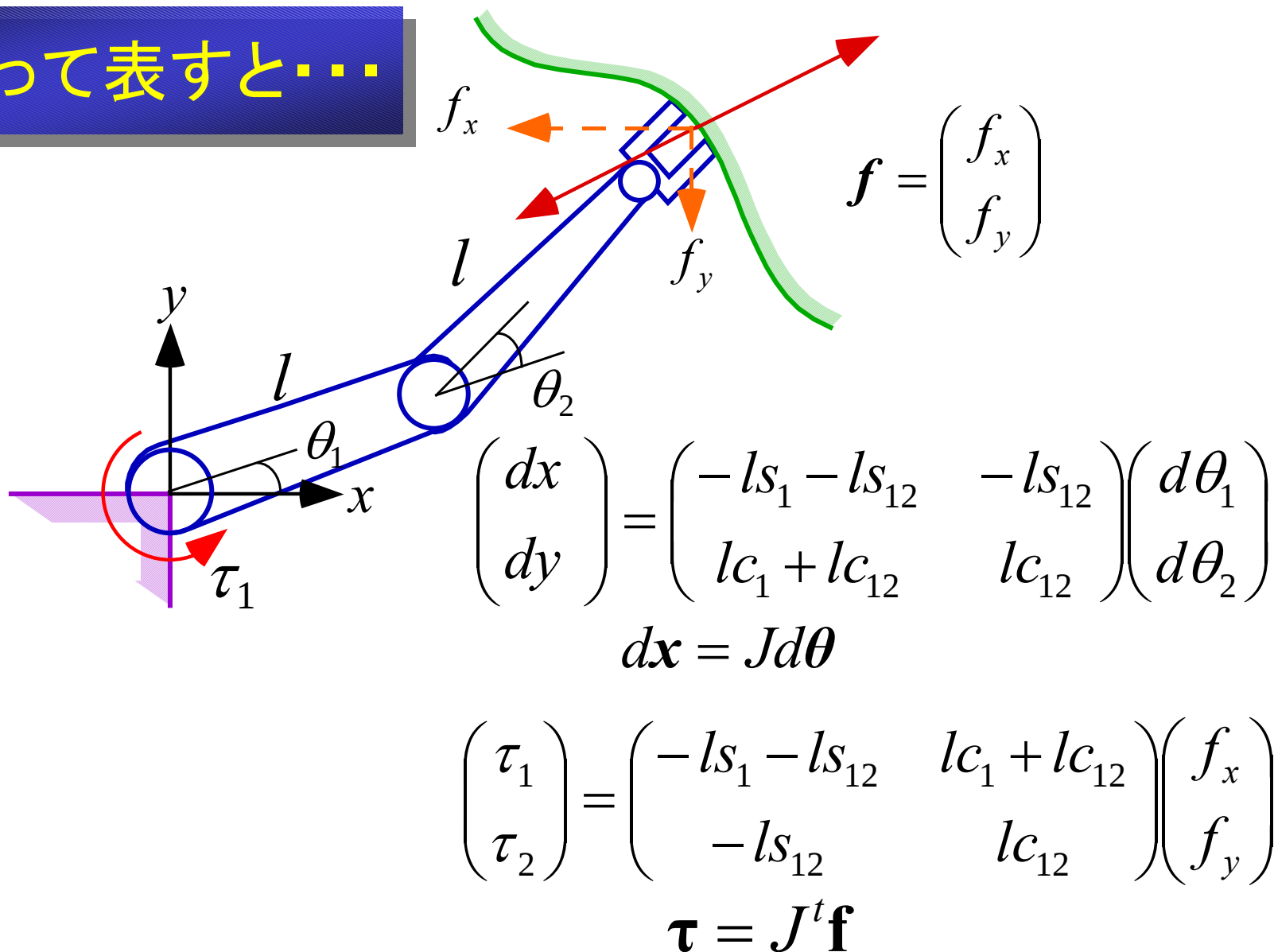
$$\begin{aligned} |\mathbf{J}| &= l^2 \{ -s_1 c_{12} - s_{12} c_{12} + s_{12} c_1 + s_{12} c_{12} \} \\ &= l^2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

課題9: 2リンクロボットに対して次の問いに答えよ

ロボット先端に $(f_x, f_y)=(1.0, 1.0)[N]$ 発生させるためには関節トルク (τ_1, τ_2) を何[Nm]加えたらよいか.



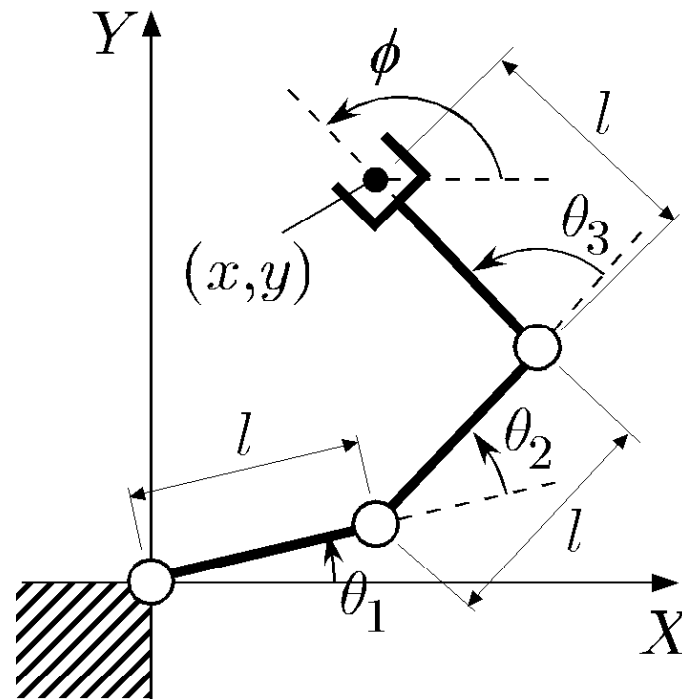
Jを使って表すと...



$$s_1 = \sin \theta_1 \quad s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad c_1 = \cos \theta_1 \quad c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

課題10: 3リンクロボットについて以下の問いに答えよ

手先位置・姿勢 (x, y, ϕ) に対して特異姿勢を求め図示せよ.



課題10: 解答

$$d\mathbf{x} = \mathbf{J} d\boldsymbol{\theta}$$

$$dx = -lS_1 d\theta_1 - lS_{12}(d\theta_1 + d\theta_2) - lS_{123}(d\theta_1 + d\theta_2 + d\theta_3)$$

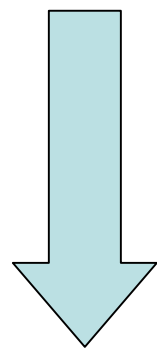
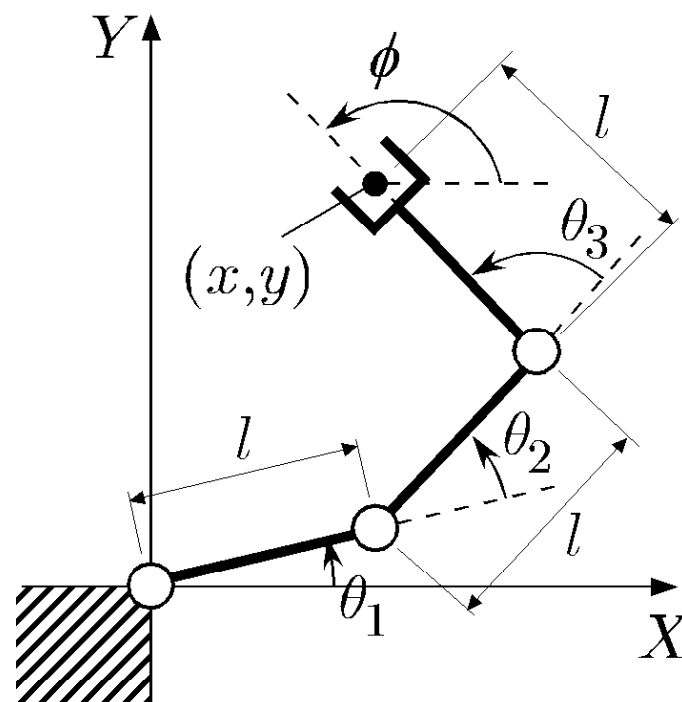
$$dy = lC_1 d\theta_1 + lC_{12}(d\theta_1 + d\theta_2) + lC_{123}(d\theta_1 + d\theta_2 + d\theta_3)$$

$$d\phi = d\theta_1 + d\theta_2 + d\theta_3$$

$$\therefore \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -lS_1 - lS_{12} - lS_{123} & -lS_{12} - lS_{123} & -lS_{123} \\ lC_1 + lC_{12} + lC_{123} & lC_{12} + lC_{123} & lC_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

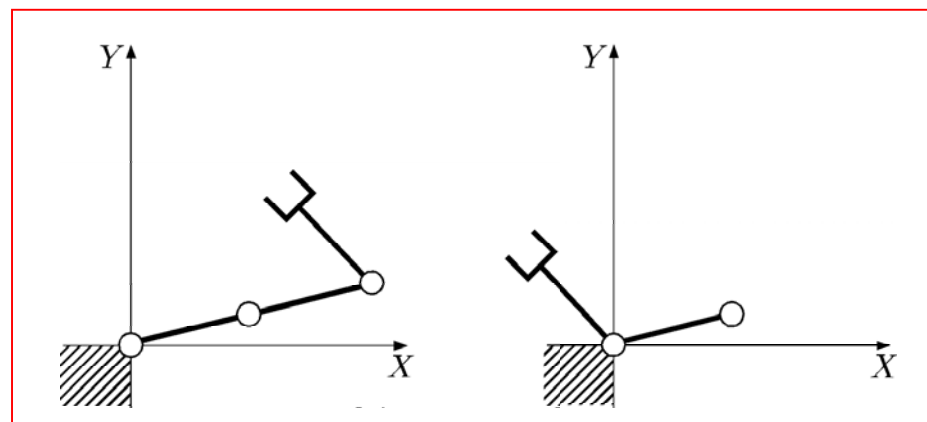
$$S_1 = \sin\theta_1, \quad S_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2), \quad S_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$C_1 = \cos\theta_1, \quad C_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad C_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

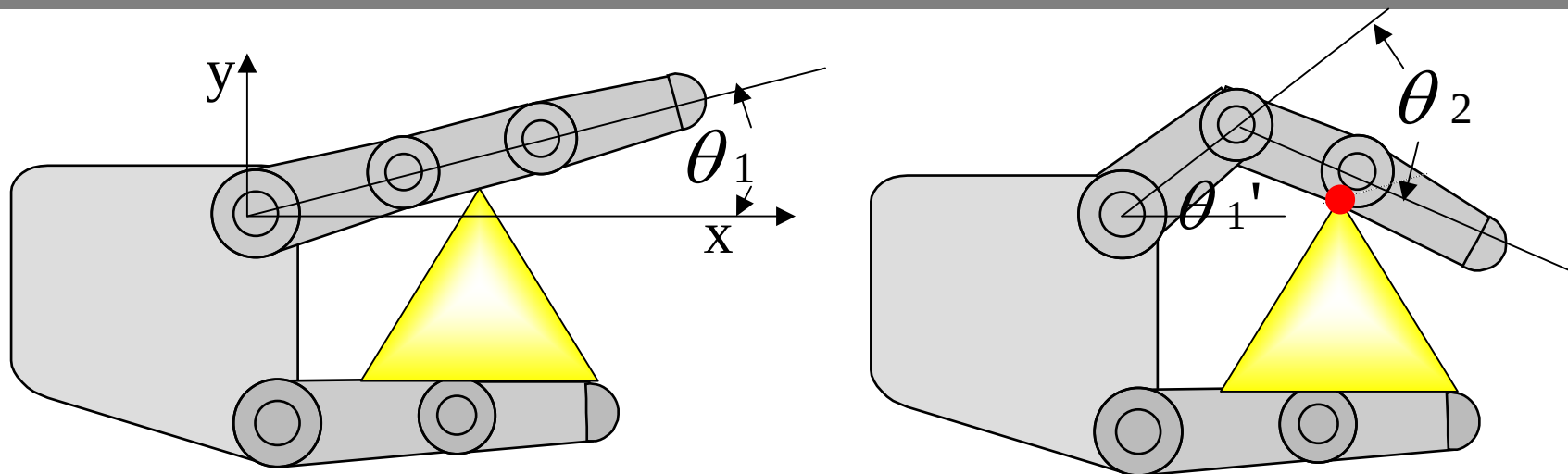


$$|\mathbf{J}| = 0$$

$$l^2 \sin\theta_2 = 0 \quad \therefore \theta_2 = n\pi$$

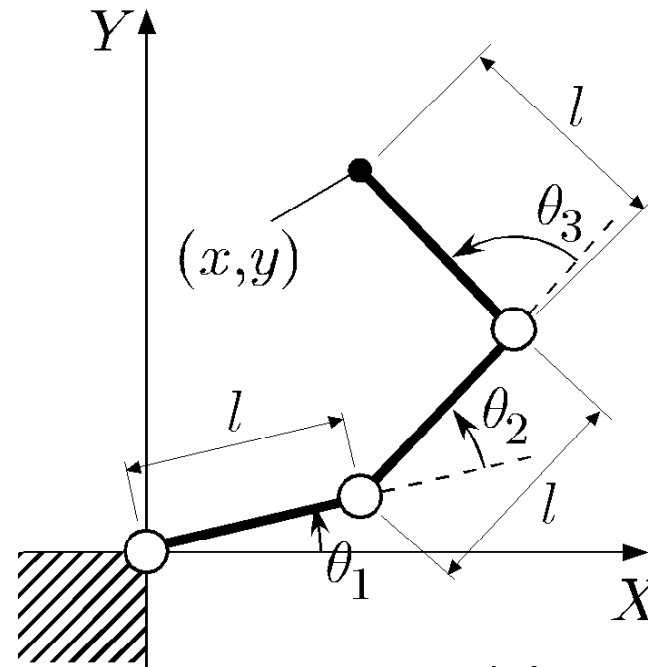


課題11: 柔軟関節と能動関節を組み合わせた
触覚センシングについて以下の問いに答えよ.



- (1) どの関節を柔らかくして, どの関節を能動関節に選べば
このような動作が実現できるか.
- (2) ハンドの幅を無視して, 接触点位置を求めよ. ただし, 関節
角度は測れるものとし, 各リンクの長はそれぞれ1.0[m]とする.

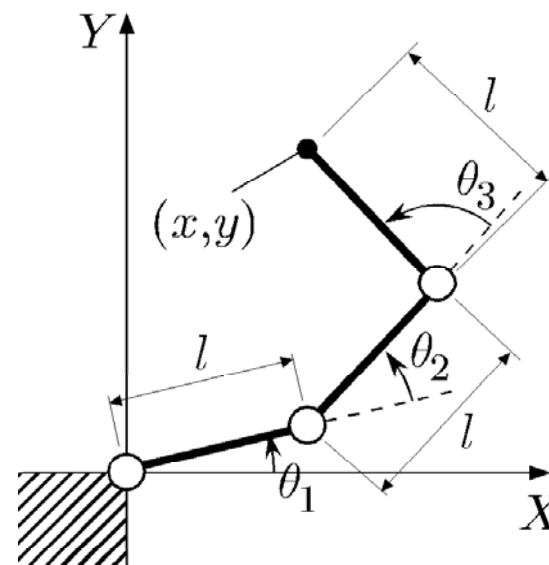
課題12: 図の3自由度ロボットについて以下の問いに答えよ.



1. 関節角度 ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) と先端位置 (x, y) との関係を示せ.
2. 関節角度変位ベクトルと先端変位ベクトルを対応づけるヤコビ行列を示せ.
3. 手先を $(0.1, 0.1)^T$ [m] 動かすときの関節角度変位の一例を示せ. ただし, リンク要素の長さは 1 [m] とする.

課題12: 解答

$$d\mathbf{x} = \mathbf{J} d\boldsymbol{\theta}$$



$$dx = -lS_1 d\theta_1 - lS_{12}(d\theta_1 + d\theta_2) - lS_{123}(d\theta_1 + d\theta_2 + d\theta_3)$$

$$dy = lC_1 d\theta_1 + lC_{12}(d\theta_1 + d\theta_2) + lC_{123}(d\theta_1 + d\theta_2 + d\theta_3)$$

$$\therefore \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -lS_1 - lS_{12} - lS_{123} & -lS_{12} - lS_{123} & -lS_{123} \\ lC_1 + lC_{12} + lC_{123} & lC_{12} + lC_{123} & lC_{123} \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \sin\theta_1, \quad S_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2), \quad S_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$C_1 = \cos\theta_1, \quad C_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad C_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$x + y = 1$$

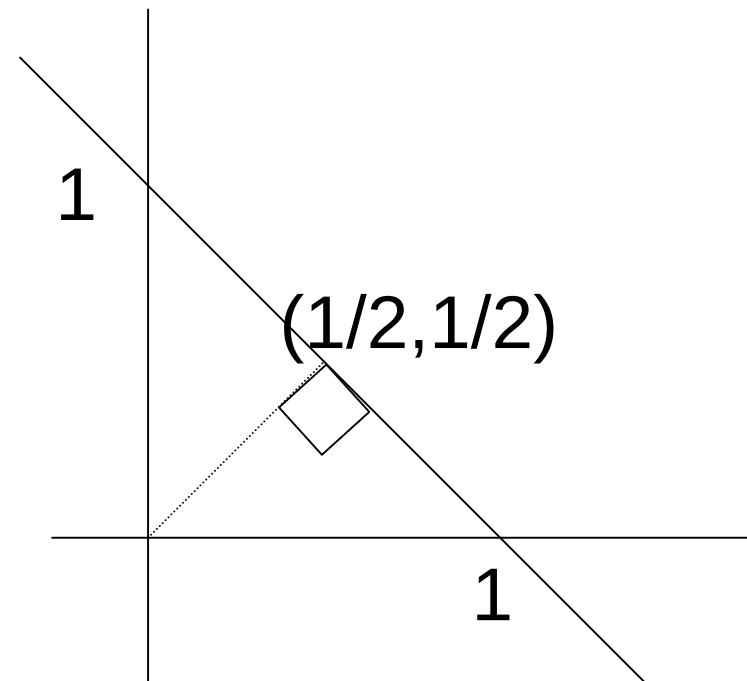
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

$$\mathbf{a}\mathbf{x} = b$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}^t [\mathbf{a}\mathbf{a}^t]^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^t [\mathbf{a}\mathbf{a}^t]^{-1} b = b$$

この方程式の解は ???

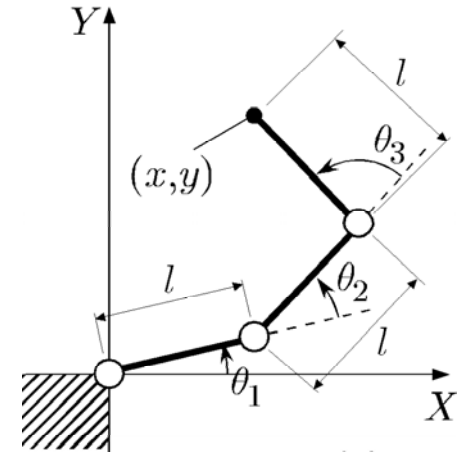


課題12: 解答

$$d\mathbf{x} = \mathbf{J} d\boldsymbol{\theta}$$

$$G(d\boldsymbol{\theta}) = d\boldsymbol{\theta}^t \mathbf{W} d\boldsymbol{\theta}$$

を，制約条件 $d\mathbf{x} - \mathbf{J}d\boldsymbol{\theta} = 0$ の下で最小化する問題



ラグランジュの未定定数 $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]^t$ を用いて

$$G(d\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = d\boldsymbol{\theta}^t \mathbf{W} d\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\lambda}^t (d\mathbf{x} - \mathbf{J}d\boldsymbol{\theta})$$

の極値条件を解く

$$\frac{\partial G}{\partial d\boldsymbol{\theta}} = 0 \quad \text{より} \quad 2\mathbf{W}d\boldsymbol{\theta} - \mathbf{J}^t \boldsymbol{\lambda} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial d\boldsymbol{\lambda}} = 0 \quad \text{より} \quad d\mathbf{x} - \mathbf{J}d\boldsymbol{\theta} = 0$$

$$d\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^t \boldsymbol{\lambda}$$

$$(\mathbf{J} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^t) \boldsymbol{\lambda} = 2d\mathbf{x}$$

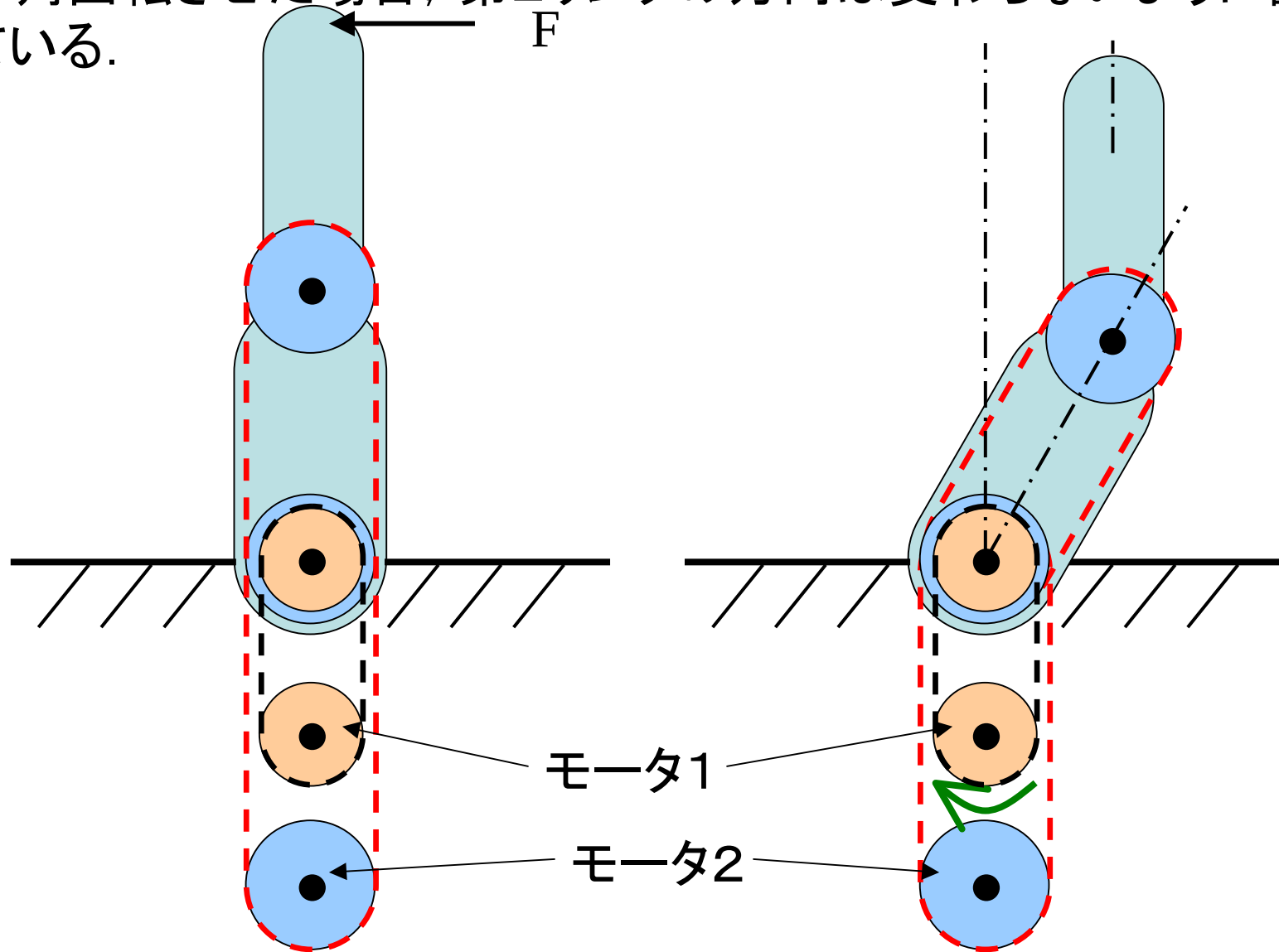
$$\boldsymbol{\lambda} = 2(\mathbf{J} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^t)^{-1} d\mathbf{x}$$

$$d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^t (\mathbf{J} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^t)^{-1} d\mathbf{x}$$

$\mathbf{W}$ を単位行列とすると

$$d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{J}^t (\mathbf{J} \mathbf{J}^t)^{-1} d\mathbf{x}$$

課題13:ワイヤ駆動ロボットの先端に力 F が作用するとき, それとバランスするモータ1, モータ2のトルクを求めよ. ただし, モータ1のみ微小角回転させた場合, 第2リンクの方向は変わらないように設計されている.



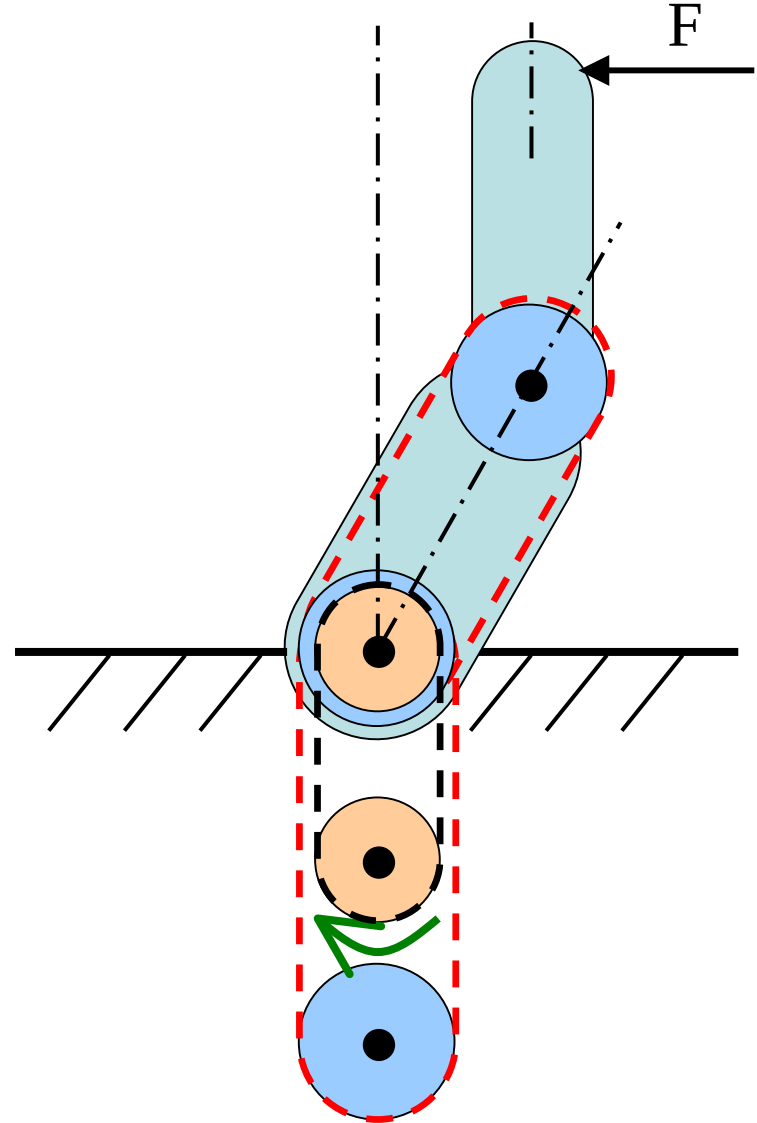
課題13: 解答

$$\tau_1 d\theta_1 = F dx = FL d\theta_1$$

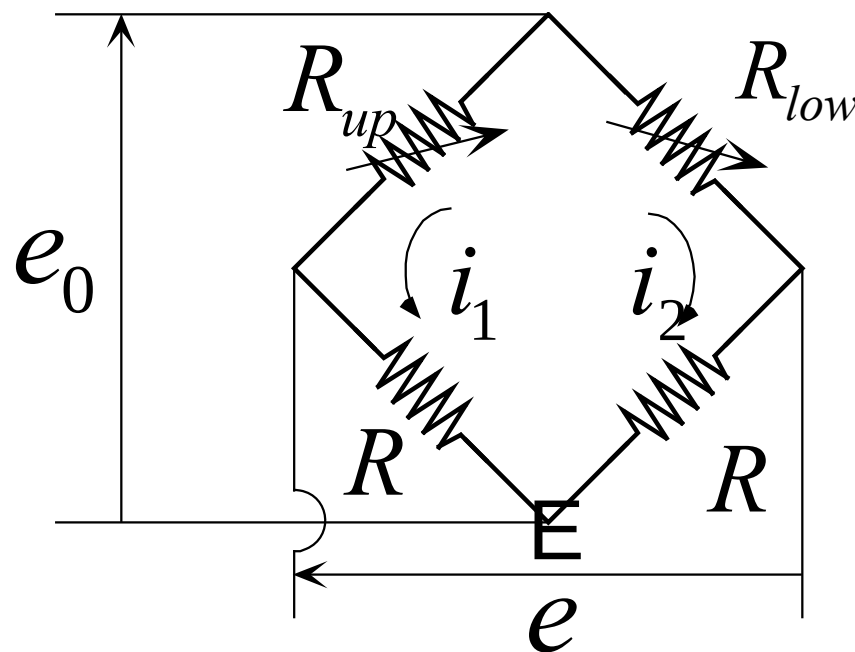
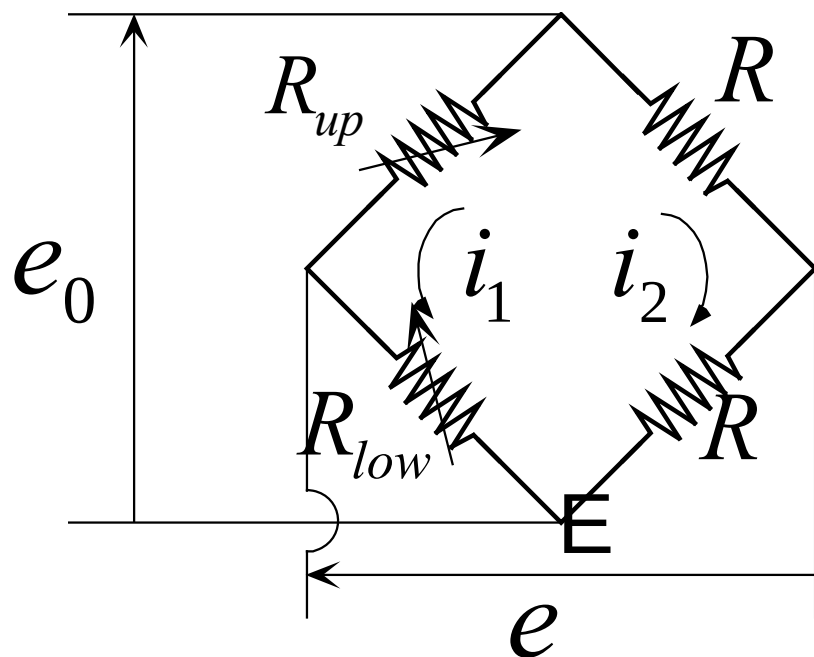
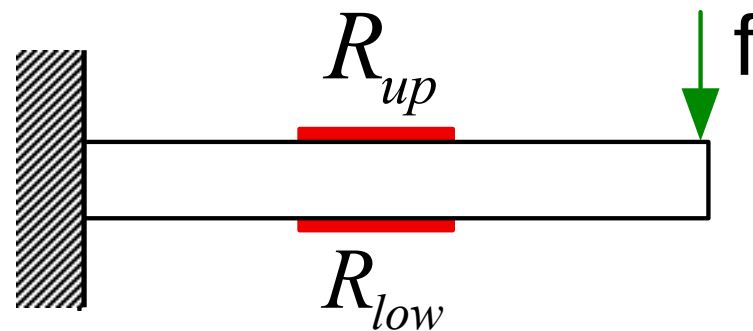
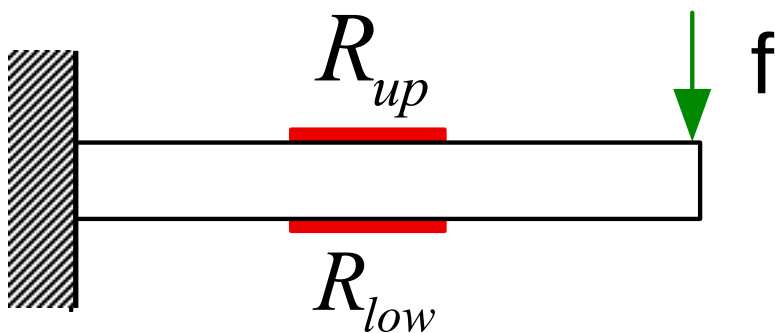
$$\therefore \tau_1 = FL$$

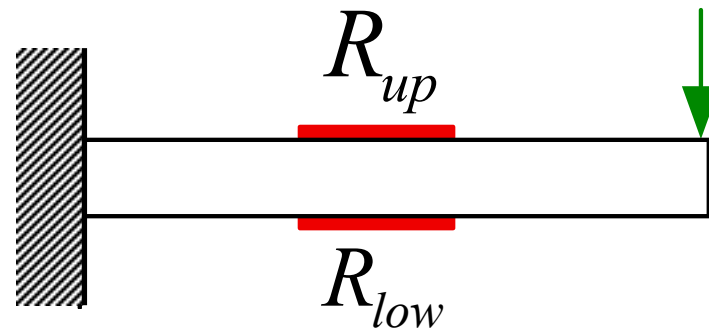
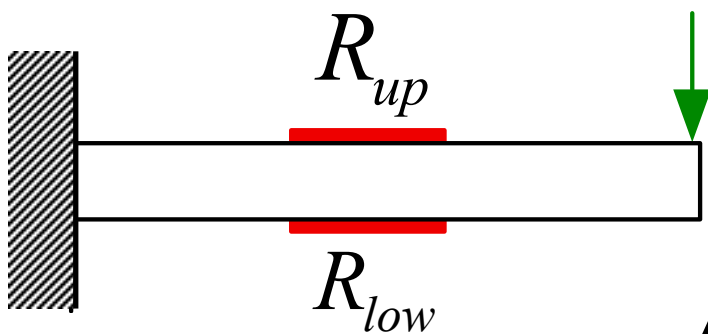
$$\tau_1 = FL$$

$$\tau_2 = FL$$

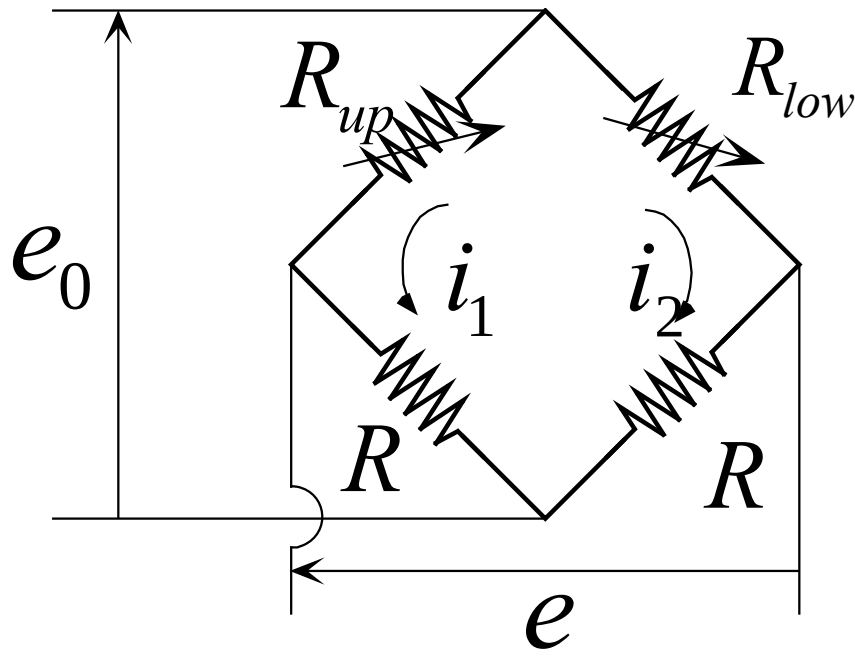
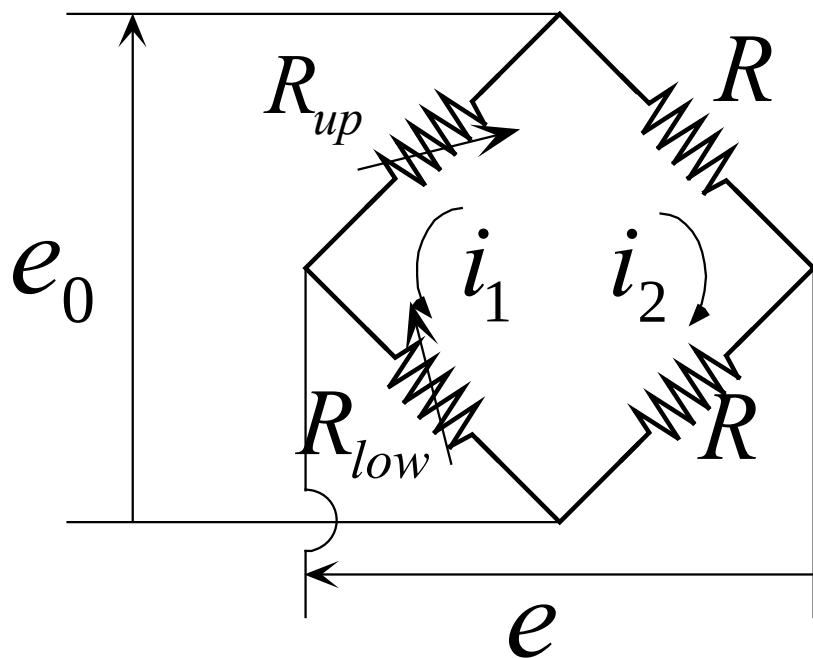


演習問題14: ひずみゲージを弾性板の上下に貼った場合の各ブリッジ出力 e を求めよ. ただし E はアース点とし, $R_{up}=R+\Delta R$, $R_{low}=R-\Delta R$, ($R \gg \Delta R$)とする.





$$e = \frac{\Delta R}{2R} e_0$$



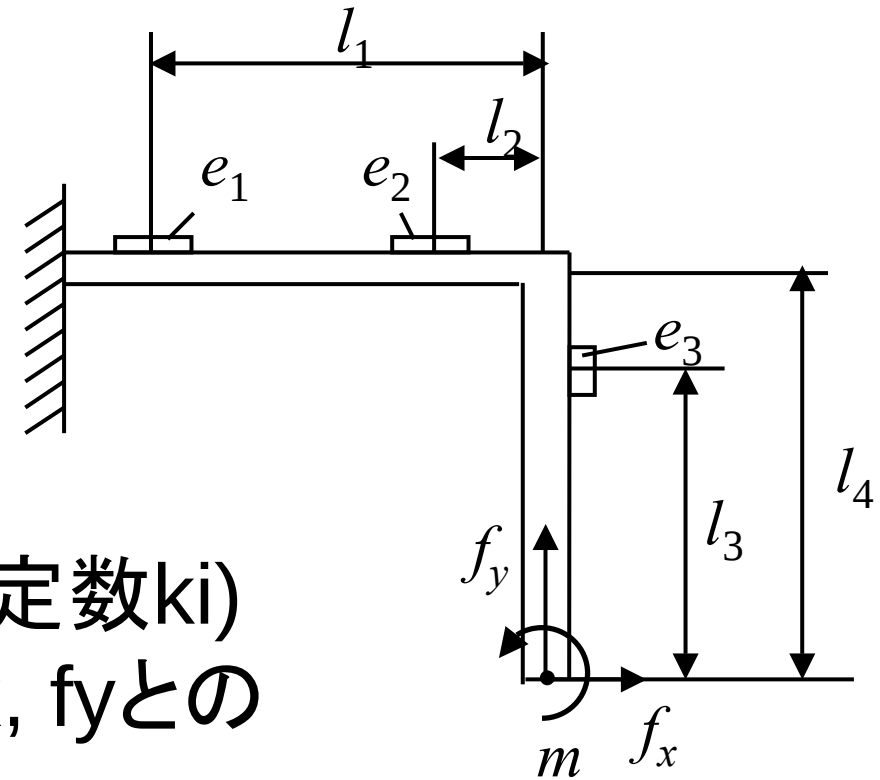
課題15

3軸力センサに対して
下記の問いに答えよ.

(1) e_i がその点にかかる
モーメントに比例 (比例定数 k_i)
するものとして e_i と m , f_x , f_y との
関係を求めよ.

(2) $e = Cf$ の関係を行列で標記
せよ.

(3) $k_i = 1$, 幾何学パラメータが
右記で与えられる場合の C の
逆行列を求めよ.

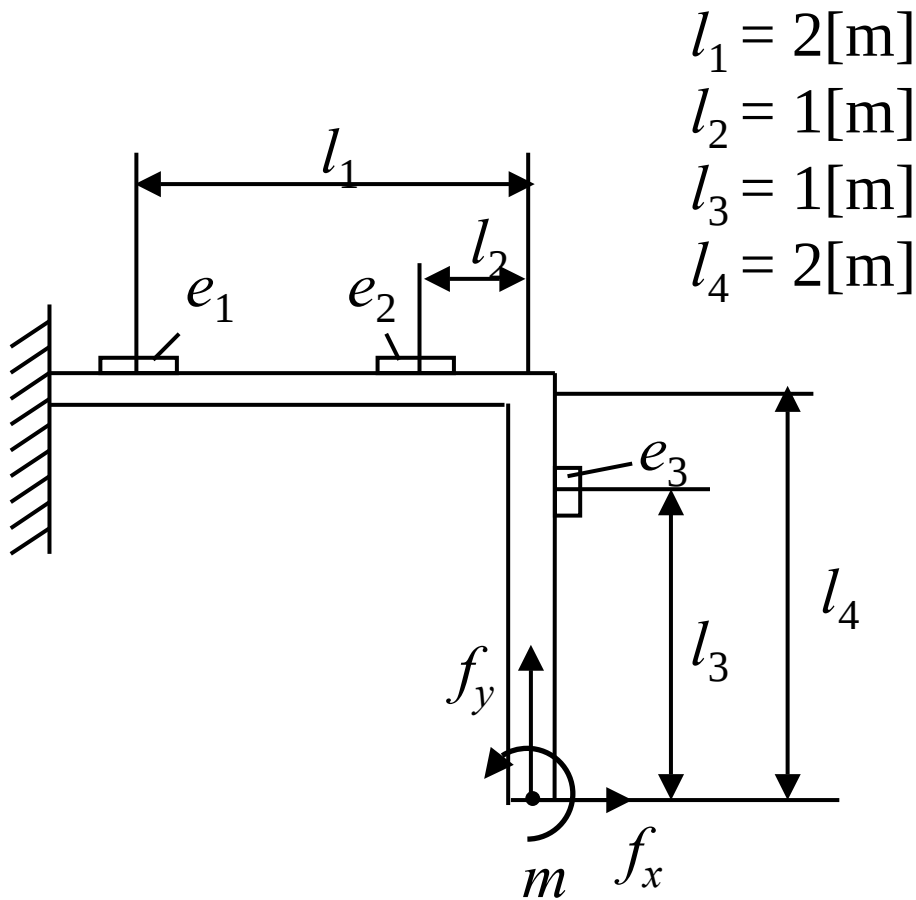


$$l_1 = 2[\text{m}]$$

$$l_2 = 1[\text{m}]$$

$$l_3 = 1[\text{m}]$$

$$l_4 = 2[\text{m}]$$



$$\begin{cases} e_1 = k_1(f_x l_4 + f_y l_1 + m) \\ e_2 = k_2(f_x l_4 + f_y l_2 + m) \\ e_3 = k_3(f_x l_3 + m) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 l_4 & k_1 l_1 & k_1 \\ k_2 l_4 & k_2 l_2 & k_2 \\ k_3 l_3 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \mathbf{C} & \\ & & \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$l_1 = 2, l_4 = 2, l_3 = 1, l_2 = 1 \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} l_4 & l_1 & 1 \\ l_4 & l_2 & 1 \\ l_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

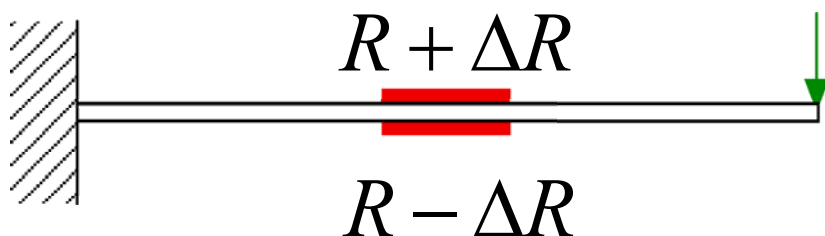
$$\begin{aligned} |\mathbf{C}| &= 2 + 2 + 0 - 1 - 4 - 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{C}|} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

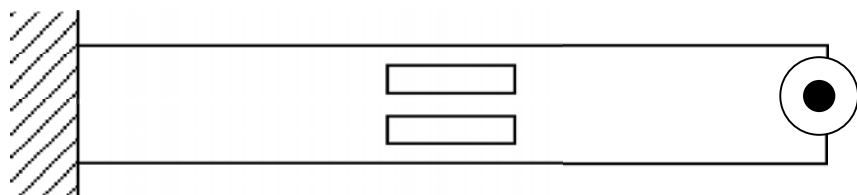
課題16:ブリッジの出力eを求めよ



上面

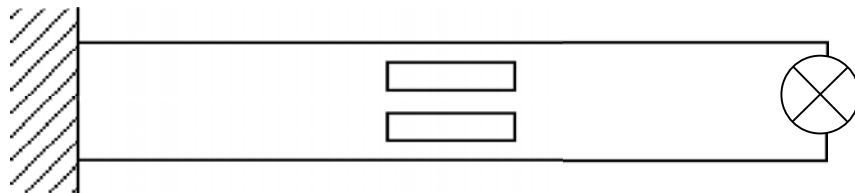


側面

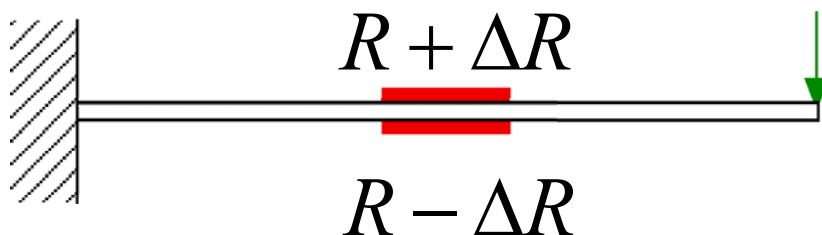


下面

課題16:ブリッジの出力eを求めよ

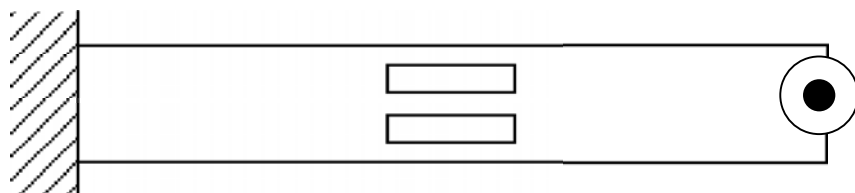


上面



側面

$$e = \frac{\Delta R}{R} e_0$$



下面